NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. Georges HUMBERT,

INGÉNIEUR EN CHEF DES MINES,
PROFESSEUR D'ANALYSE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1900

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. Georges HUMBERT,

Ingénieur en chef des Mines,
Professeur d'Analyse à l'École Polytechnique

TITRES DIVERS.

Élève de l'École Polytechnique.................	1877-79
Répétiteur auxiliaire d'Analyse à l'École Polytechnique....................................	1884
Docteur ès Sciences mathématiques.............	1885
Lauréat de l'Académie des Sciences (Prix Poncelet, pour l'ensemble de ses travaux)..............	1891
Lauréat de l'Académie des Sciences (Prix Bordin, pour un Mémoire sur un sujet mis au Concours).	1892
Président de la Société Mathématique de France...	1893
Professeur d'Analyse à l'École Polytechnique.....	1895
Présenté en troisième et en seconde ligne aux trois dernières vacances dans la Section de Géométrie à l'Académie des Sciences....................	1887-1889-1892

AVANT-PROPOS.

Les Mémoires dont on va lire la liste se rattachent à la fois à l'Analyse et à la Géométrie et traitent principalement de la théorie des courbes et des surfaces algébriques : quelques-uns sont des travaux d'Analyse ou de Géométrie pure; les autres dérivent en général d'un principe commun, celui de l'application ou de l'interprétation, dans le domaine géométrique, des propriétés des fonctions qu'on rencontre en Analyse, principe dont les recherches de Clebsch, entre autres, ont mis en évidence la fécondité. C'est ainsi que j'ai eu l'occasion, pour l'étude des courbes ou des surfaces, d'employer les fonctions elliptiques, les fonctions fuchsiennes et thêta-fuchsiennes de M. Poincaré, les fonctions abéliennes de deux et de trois variables.

En Analyse, je mentionnerai surtout mes recherches sur les fonctions abéliennes singulières, leur transformation, leurs multiplications complexes, les fonctions intermédiaires qui s'y rattachent.

Ces théories, tout à fait neuves et qui comblent une importante lacune, entraînent d'intéressantes conséquences dans le domaine géométrique; elles m'ont donné, à côté de remarquables surfaces du quatrième ordre, les premiers et les seuls exemples explicites connus jusqu'ici de surfaces hyperabéliennes.

Je signalerai également un Mémoire (81) sur les intégrales de différentielles algébriques où sont établis des résultats que M. Weierstrass, je l'ai su depuis, indiquait dans son cours, mais qu'il n'avait pas publiés; mes recherches sur le théorème d'Abel m'ont aussi conduit à des formules et à des théorèmes analytiques qui ne semblent pas sans intérêt et dont j'ai tiré grand parti en Géométrie.

Au cours de ces études, j'ai eu la bonne fortune, sur des sujets déjà abordés avant moi, de rencontrer des propositions nouvelles, d'un

énoncé simple et frappant, dont quelques-unes étaient assez cachées : on me permettra de citer, en particulier, les théorèmes sur les aires sphériques et ellipsoïdales, qui étendent à la sphère et à l'ellipsoïde des propriétés fondamentales du cercle et de l'ellipse, ceux qui se rapportent aux arcs de courbes, à la surface de Kummer, à certaines surfaces algébriques.

Le résumé qui va suivre, ordonné d'après les questions traitées, est divisé en cinq sections :

1° Courbes algébriques;

2° Théorème d'Abel et applications géométriques de ce théorème;

3° Surfaces algébriques;

4° Fonctions abéliennes et surfaces hyperelliptiques;

5° Travaux divers.

Les travaux de la seconde section auraient pu se répartir entre les autres, mais ils forment un tout si homogène qu'il m'a paru préférable de les grouper.

LISTE DES MÉMOIRES.

COURBES ALGÉBRIQUES.

1. Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. II; 1886).
2. Sur un problème de contact de M. de Jonquières (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. IV; 1890).
3. Sur les courbes de genre un (Thèse de doctorat, Paris, Gauthier-Villars; 1885).
4, 5, 6. Sur les courbes de genre un (Notes publiées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 2e semestre 1883).
7. Sur la courbe du quatrième ordre à deux points doubles (*Ibid.*, 1er semestre 1884).
8. Sur les courbes du troisième ordre (*Bulletin de la Société philomathique*).
9. Sur les courbes de Clebsch... (*Bulletin de la Société Mathématique*, t. IX; 1881).
10. Sur les courbes unicursales (*Ibid.*, t. XIII; 1885).
11. Sur les courbes algébriques planes rectifiables (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IV; 1888).
12. Sur les courbes algébriques rectifiables (*Comptes rendus*, 1er sem. 1887).
13. Sur les coniques inscrites à une quartique (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*; 1890).
14. Sur une interprétation géométrique de l'équation modulaire pour la transformation du troisième ordre (*Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXVI; 1898).
15. Sur une interprétation géométrique de l'équation modulaire (*Ibid.*, t. XXVII; 1899).
16. Sur les polygones de Poncelet (*Ibid.*).

THÉORÈME D'ABEL.

17. Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications géométriques (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. III; 1887).
18. Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie (*Ibid.*, t. V; 1889, et t. VI; 1890).
19. Application géométrique d'un théorème de Jacobi (*Ibid.*, t. I; 1885).
20. Sur les courbes cycliques de direction (*Ibid.*, t. IV; 1888).
21. Sur le théorème d'Abel (*Comptes rendus*, 2e semestre 1886).
22. Sur quelques propriétés métriques des courbes (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. VI; 1887).
23. Sur l'orientation des systèmes de droites (*Ibid.*, t. XII; 1893).
24. Sur l'orientation des systèmes de droites (*American Journal of Mathematics*, t. X; 1888).
25. Sur le lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de courbes planes (*Comptes rendus*, 1er semestre 1887).
26. Sur quelques propriétés des aires sphériques (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IV; 1888).
27. Sur quelques propriétés des surfaces coniques (*Comptes rendus*, 2e semestre 1887).
28. Sur quelques propriétés des aires sphériques (*Ibid.*).
29. Sur l'aire de certaines zones ellipsoïdales (*Ibid.*, 2e semestre 1889).
30. Sur certaines aires ellipsoïdales (*Ibid.*).
31. Expression de quelques aires sur le paraboloïde elliptique (*Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXI; 1893).
32. Expression de quelques nouvelles aires sur le paraboloïde elliptique (*Ibid.*).
33. Quelques propriétés des arcs des courbes algébriques planes ou gauches (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. I; 1895).
34. Sur les arcs des courbes planes algébriques (*Journal de l'École Polytechnique*, 57e cahier; 1887).
35. Sur les arcs de courbe (*Comptes rendus*, 1er semestre 1887).
36. Sur les arcs des courbes planes (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. VII; 1888).

SURFACES ALGÉBRIQUES.

37. Sur les surfaces cyclides (*Journal de l'École Polytechnique*, 55e cahier; 1885).
38. Sur les lignes de courbure des cyclides (*Comptes rendus*, 1er sem. 1888).
39. Sur les surfaces homofocales du second ordre (*Bulletin de la Société Mathématique*, t. XIII; 1885).
40. Sur la détermination des axes de l'indicatrice en un point d'une surface du second ordre (*Ibid.*).
41. Sur une génération géométrique de la surface de Kummer (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XI; 1897).
42. Sur une propriété des cônes du second ordre (*Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXI; 1893).
43. Sur un complexe remarquable de coniques (*Journal de l'École Polytechnique*, 66e cahier; 1894).
44. Sur la surface desmique du quatrième ordre (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VII; 1891).
45. Sur une classe de quartiques planes (*Ibid.*, t. VI; 1890).
46. Sur les normales aux quadriques (*Comptes rendus*, 1er semestre 1888).
47. Théorèmes concernant une classe de surfaces algébriques (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. III; 1889).
48. Sur une classe de surfaces algébriques (*Ibid.*, t. VI; 1890).
49. Des involutions sur les courbes algébriques;
50. Sur une classe de surfaces à génératrices unicursales;
51. Des séries de courbes algébriques tracées sur les surfaces algébriques (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. X; 1894).
52. Des involutions sur les courbes algébriques (*Bulletin de la Société Mathématique*, t. XV; 1892).
53. Sur une classe de surfaces à génératrices rationnelles (*Comptes rendus*, 1er semestre 1893).
54. Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques (*Ibid.*, 2e semestre 1893).
55. Sur la théorie générale des surfaces unicursales (*Mathematische Annalen*, t. XLV; 1894).
56. Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. II; 1896).

57, 58. Sur une surface du sixième ordre qui se rattache à la surface de Kummer (*Comptes rendus*, 1[er] semestre 1895).
59. Sur les courbes de quatrième classe (*Ibid.*).

FONCTIONS ABÉLIENNES ET SURFACES HYPERELLIPTIQUES.

60. Théorie générale des surfaces hyperelliptiques (*Journal de Mathématiques*, 4[e] série, t. IX; 1893).
61. Sur la surface de Kummer (*Ibid*, t. V; 1894).
62. Sur les surfaces de Kummer elliptiques (*American Journal of Mathematics*, t. XVI; 1894).
63. Sur la décomposition des fonctions thêta en facteurs (*Comptes rendus*, 1[er] semestre 1898).
64. Sur les fonctions abéliennes singulières (*Ibid.*).
65. Sur la transformation des fonctions abéliennes (*Ibid.*).
66. Sur les transformations singulières des fonctions abéliennes (*Ibid.*).
67. Sur la multiplication complexe des fonctions abéliennes (*Ibid.*, 2[e] semestre 1898).
68. Sur certaines surfaces remarquables du quatrième ordre (*Ibid.*, 2[e] semestre 1899).
69. Sur les fonctions hyperabéliennes (*Ibid.*).
70. Sur la transformation des fonctions abéliennes (*Ibid.*).
71. Sur les fonctions à quatre paires de périodes (*Ibid.*, 1[er] semestre 1900).
72. Sur les fonctions abéliennes singulières. — Premier Mémoire (*Journal de Mathématiques*, 5[e] série, t. V; 1899).
73. Sur les fonctions abéliennes singulières. — Second Mémoire (*Journal de Mathématiques*, 5[e] série, t. VI; 1900).

TRAVAUX DIVERS.

74. Sur l'équation hypergéométrique (*Bulletin de la Société Mathématique*, t. VIII; 1880).

75. Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynome (*Ibid.*).
76. Sur la réduction en fractions continues d'une classe de fonctions (*Ibid.*).
77. Sur une généralisation de la théorie des fractions continues (*Ibid.*, t. VIII; 1880, et t. IX; 1881).
78. Sur une formule de M. Hermite (*Ibid.*, t. IX; 1881).
79. Sur la fonction $(x-1)^a$ (*Ibid.*).
80. Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre (*Journal de l'École Polytechnique*, 48e cahier; 1880).
81. Sur les intégrales algébriques de différentielles algébriques (*Acta mathematica*, t. X; 1887).

RÉSUMÉ DES MÉMOIRES.

PREMIÈRE SECTION.

COURBES ALGÉBRIQUES.

I. — Courbes de genre quelconque.

1. M. Poincaré, dans un Travail célèbre, a établi qu'on peut exprimer les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique en fonction *fuchsienne* d'un paramètre; c'est ce résultat capital qui m'a servi de point de départ, pour l'étude géométrique des courbes planes, dans le Mémoire 1.

En introduisant, au lieu des cooordonnées cartésiennes, les coordonnées homogènes, je montre que, pour une courbe plane, x_1, x_2, x_3 sont proportionnels à trois fonctions *thêtafuchsiennes holomorphes*, mais, dès ce début, se présente une différence importante avec les cas classiques des courbes de genre zéro ou un. En effet, pour une courbe, soit unicursale, soit elliptique, *de degré n*, les coordonnées x_1, x_2, x_3 sont proportionnelles, soit à trois polynomes *d'ordre n*, soit à trois fonctions thêta *d'ordre n*, d'une même variable; pour une courbe de degré n et de genre p, supérieur à l'unité, le résultat est moins simple.

2. Soient $2(\mu-1)(p-1)$ et $2\mu(p-1)$ les deux multiples consécutifs de $2(p-1)$ qui comprennent n, de sorte que

$$2(\mu-1)(p-1) < n \leqq 2\mu(p-1);$$

si l'on a

$$2\mu(p-1) - n \geqq p,$$

les coordonnées d'un point de la courbe seront proportionnelles à

trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes d'ordre μ, et l'on ne pourra jamais, pour cette représentation, employer des fonctions d'ordre inférieur. Si, au contraire, on a

$$2\mu(p-1)-n<p,$$

les fonctions thêtafuchsiennes de la représentation seront, en général, d'ordre $\mu+1$, *mais pourront être d'ordre* μ.

On voit ainsi que, dans ce second cas, il existe deux espèces de courbes de degré n et de genre p, distinguées par leur mode de représentation thêtafuchsienne; j'ai cherché à les caractériser géométriquement, et j'ai aussi reconnu l'existence de deux espèces analogues dans le premier cas. Voici le résultat, si l'on désigne, pour abréger, par *groupe* γ tout groupe de $2(p-1)$ points simples suivant lequel une courbe de degré n et de genre p est coupée par une courbe adjointe de degré $n-3$.

Premier cas : $2\mu(p-1)-n\geqq p$. — *Sur une courbe de première espèce,* μ *groupes* γ *quelconques sont traversés par une courbe adjointe d'ordre* $n-2$, *qui coupe en outre la proposée en des points fixes; sur une courbe de deuxième espèce,* μ *goupes* γ *ne peuvent jamais être sur une adjointe d'ordre* $n-2$.

Second cas : $2\mu(p-1)-n<p$. — *En toute hypothèse,* μ *groupes* γ *quelconques sont traversés par une adjointe d'ordre* $n-2$: *ses autres points simples d'intersection avec la proposée sont toujours sur une adjointe d'ordre* $n-3$, *dans le cas d'une courbe de première espèce, et n'y sont jamais dans le cas d'une courbe de deuxième espèce.*

3. Grâce aux fonctions thêtafuchsiennes, on peut retrouver, au point de vue transcendant, les théorèmes de MM. Nöther et Brill, relatifs à la *Géométrie sur une courbe*, et en démontrer de nouveaux; il suffira, pour le faire comprendre, d'indiquer les deux propositions suivantes qui établissent la liaison entre les fonctions thêtafuchsiennes et les courbes adjointes.

Soit S la courbe de degré n et de genre p pour laquelle les coordonnées homogènes d'un point sont proportionnelles à trois fonctions

thêtafuchsiennes d'ordre m, qui ont k zéros communs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$,

$$k = 2m(p-1) - n.$$

1° *Les arguments fuchsiens des points non singuliers où* S *est coupée par une adjointe de degré* $n+q-3$ *annulent une fonction thêtafuchsienne holomorphe d'ordre* $mq+1$, *dont les autres zéros sont* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, *chacun au degré* q *de multiplicité, et réciproquement.*

2° *Soit une courbe de degré* $n+q-3$ *adjointe à* S *et traversant un groupe* γ; *les arguments fuchsiens des autres points non singuliers où elle coupe* S *annulent une fonction thêtafuchsienne holomorphe d'ordre* mq, *dont les autres zéros sont* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, *chacun au degré* q, *et réciproquement.*

Des théorèmes analogues s'appliquent au cas où la courbe proposée admettrait des adjointes de degré $n-4$.

4. Le Mémoire I traite ensuite de l'intersection de la courbe fondamentale avec une courbe *non adjointe*, et aborde, comme conséquence, le problème des *courbes de contact*, c'est-à-dire des courbes qui ont, avec la proposée, un contact d'ordre donné en tous leurs points de rencontre avec elle.

Ce problème a été traité par Clebsch dans le cas des courbes *adjointes*; le théorème d'Abel et les éléments de la Théorie de l'inversion de Riemann permettent de le résoudre aisément. Pour les courbes non adjointes, il faut introduire en outre des intégrales abéliennes de troisième espèce; la question se rattache alors au problème de l'inversion *étendu* et n'avait pas encore de solution géométrique générale.

L'emploi des fonctions fuchsiennes m'a permis de combler cette lacune sans recourir aux intégrales de troisième espèce, dans le cas où la courbe proposée n'a comme singularités que des points doubles; j'envisage d'ailleurs la question de l'intersection d'une courbe algébrique fixe et d'une courbe variable à un autre point de vue que Clebsch.

L'illustre géomètre se préoccupait spécialement des relations qui lient les coordonnées des points communs; j'examine, au contraire, celles qui lient les paramètres dont dépend la courbe sécante, supposée

soumise à certaines conditions d'intersection; je peux ainsi, dans le cas particulier des courbes de contact, donner non seulement les propriétés des systèmes de points de contact, mais indiquer la forme de l'équation générale des courbes tangentes et en déduire des propriétés de ces courbes elles-mêmes.

5. Voici les principaux résultats de cette théorie :

La famille des courbes d'ordre donné m, qui passent par k points doubles et k' points simples donnés sur une courbe de genre p, à d points doubles, et qui ont avec cette courbe, en chacun des autres points de rencontre, un contact d'ordre $r-1$, *se subdivise en* r^{2p} *systèmes.*

Chaque système comprend lui-même r^{d-k} *groupes de courbes; le premier membre de l'équation des courbes d'un même groupe est un polynome d'ordre r par rapport aux paramètres demeurés arbitraires.*

Les systèmes de points de contact jouissent de propriétés importantes; ainsi :

Toute courbe d'ordre m, menée par les k points doubles, les k' points simples donnés, et par les points de contact de $r-1$ *courbes de la famille précédente, coupe en outre la proposée en de nouveaux points qui sont les points de contact d'une autre courbe de la famille; le système et le groupe auxquels appartient cette dernière courbe de contact restent fixes, quand les systèmes et les groupes auxquels appartiennent les* $r-1$ *premières restent fixes eux-mêmes.*

6. Cette théorie géométrique est liée à l'étude de fonctions uniformes intéressantes qui se rattachent aux *Wurzelfunctionen* des Allemands et aux *fonctions à multiplicateurs* de M. Appell.

Soit G un groupe fuchsien de la première famille de M. Poincaré, dérivant de $2p$ substitutions et dont le polygone a $4p$ côtés, les côtés opposés étant conjugués; on peut former des fonctions $\mathfrak{F}(z)$, uniformes dans l'intérieur du cercle fondamental, satisfaisant aux relations

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\lambda_j z+\mu_j}{\nu_j z+\varpi_j}\right)=\mathfrak{F}(z)\,e^{2h_j\frac{\pi i}{r}}\quad (j=1, 2, \ldots, 2p),$$

où $\left(z, \frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right)$ est une quelconque des substitutions fondamentales du groupe G et où les h_j sont des entiers choisis arbitrairement.

Je trouve aussi des fonctions *holomorphes* dans le cercle fondamental, et vérifiant des relations semblables à celles des fonctions thêtafuchsiennes, à un facteur, racine de l'unité, près; et de là se déduisent des propriétés des systèmes et des groupes de courbes de contact, que j'appelle *complémentaires*.

7. Un cas particulier intéressant est celui où l'équation générale des courbes de contact d'un même groupe ne renferme qu'un paramètre arbitraire qui, d'après la théorie précédente, y figure au degré r; dans ce cas :

Par un point du plan passent r courbes du groupe; leurs points de contact et les points fixes sont sur une courbe de même ordre que j'appelle courbe polaire *du point considéré; inversement, ce point est dit* pôle *de sa courbe polaire. Si la courbe polaire d'un point* P *passe par un point* P′, *la courbe polaire de* P′ *passe par* P.

Lorsque r est impair, toute courbe polaire passe par son pôle.

8. Les applications de ces principes aux courbes des quatrième et cinquième degrés conduisent à des résultats simples; ainsi :

Courbe du quatrième ordre à un point double : *Il y a* 16 *systèmes de coniques touchant la courbe en quatre points; l'un d'eux ne contient que des droites doubles, chacun des* 15 *autres se divise en deux groupes, de sorte qu'il n'existe, en réalité, que* 30 *groupes de coniques de contact* (¹).

Les points de contact de deux coniques du même système et du même groupe sont sur une conique; par les points de contact de deux coniques du même système et de groupes différents, on peut mener un faisceau de cubiques, dont le neuvième point fixe est le point double de la courbe.

(¹) Et non 31, comme il est dit dans les *Leçons sur la Géométrie* de Clebsch. De même, dans le cas des courbes du quatrième ordre à trois points doubles, il n'y a que *quatre* groupes de coniques quadritangentes, au lieu des *sept* groupes qu'indique Clebsch.

Il y a 81 *systèmes de* cubiques *osculatrices en quatre points à la quartique considérée; l'un d'eux ne contient que des droites triples, chacun des* 80 *autres se divise en* 3 *groupes.*

On peut représenter les systèmes par les symboles (a, b, c, d) *et les groupes par les symboles* (α); a, b, c, d, α *pouvant prendre les valeurs* 0, 1, 2 : *c'est le système* (0, 0, 0, 0) *qui ne contient que des droites.*

Les huit points de contact de deux cubiques appartenant aux systèmes et groupes respectifs (a, b, c, d), (α); (a', b', c', d'), (α') *sont sur une onique si* $a + a'$, $b + b'$, $c + c'$, $d + d'$, $\alpha + \alpha'$ *sont égaux à* 0 *ou à* 3; *de même, les douze points de contact de trois cubiques sont sur une cubique si les sommes des quantités* a, b, c, d, α *correspondantes sont égales à* 0 *ou à un multiple de* 3.

Courbes du cinquième ordre : *Les coniques proprement dites qui touchent en cinq points une courbe du cinquième degré ayant* 1, 2, 3, 4, 5 *ou* 6 *points doubles ordinaires, sont respectivement au nombre de* 1023, 510, 252, 121, 53 *et* 16.

9. Un Chapitre du Mémoire est consacré aux courbes *hyperelliptiques :* une courbe d'ordre n est dite *hyperelliptique* lorsque toute adjointe d'ordre $n-3$ qui passe par un de ses points passe aussi par un autre point, et ces deux points sont dits *conjugués*. Je montre que :

Les droites qui joignent les couples de points conjugués sur une courbe hyperelliptique générale, d'ordre n *et de genre* p, *enveloppent une courbe unicursale de classe* $n-p-1$, *d'ordre* $2(n-p-2)$, *qui touche la proposée en* $3n-2p-6$ *points.*

Les courbes de genre deux sont hyperelliptiques; j'étudie celles de degrés quatre et cinq, et l'emploi des fonctions thêtafuchsiennes me donne quelques résultats simples; ainsi :

Les coniques qui traversent trois couples de points conjugués, sur une courbe du quatrième ordre à un point double, passent par deux points fixes de cette courbe et forment une famille linéaire deux fois infinie.

10. La théorie des fonctions fuchsiennes m'a également servi, dans le Mémoire 2, à établir une proposition analogue à un théorème énumératif bien connu de l'amiral de Jonquières :

Parmi les surfaces d'ordre n appartenant à un système linéaire $\rho - 1$ *fois infini, le nombre de celles qui ont, en un point, avec une courbe plane ou gauche de degré m et de genre p, un contact d'ordre* $\rho - 1$, *est égal à* $mn\rho + \rho(\rho - 1)(p - 1)$.

Dans certains cas, que j'indique tous, ce nombre subit une modification; ainsi : *Sur une courbe gauche non sphérique, de degré m et de genre p, le nombre des* sommets, *c'est-à-dire des points où la sphère osculatrice a un contact d'ordre supérieur au troisième, est* $10m + 2(p - 1)$.

Postérieurement à mon Mémoire, M. Hurwitz a établi, à un autre point de vue, un cas particulier de cette formule (*Math. Annalen*, t. XLI).

II. — Courbes de genres un et zéro.

11. Dans ma thèse de Doctorat (3), j'avais appliqué des méthodes analogues à l'étude des courbes de genre un; parmi les résultats qui me sont personnels, on peut citer les suivants :

J'indique, étant donnée l'expression des coordonnées des points d'une courbe de genre un en fonction elliptique d'un paramètre, le moyen de reconnaître si elle est de genre un ou zéro, à l'aide d'opérations algébriques simples. Dans le premier cas, je forme *son équation* sans introduire de facteurs étrangers, ainsi que les *équations de ses adjointes d'ordres* $n - 3$, $n - 2$, $n - 1$, en désignant son degré par n.

12. Les notes 4, 5, 6 se rapportent à ce genre de recherches; plus sommaires que le Mémoire complet, elles renfermaient une lacune qu'un géomètre allemand, M. Schlesinger, a cru devoir relever dans les *Comptes rendus*, puis dans les *Mathematische Annalen*; averti par M. Nöther, il a reconnu ensuite, dans une Note insérée à ce dernier Recueil, l'exactitude absolue et complète des résultats de ma Thèse.

13. A propos du problème des courbes de contact, traité par Clebsch, je donne des propriétés, non seulement des points de contact, mais des courbes elles-mêmes, avec application aux *coniques biosculatrices à une cubique plane.*

14. En appelant *points conjugués* dans un système s deux points d'une courbe de genre un dont les arguments elliptiques ont pour somme s, j'indique sur ces systèmes de points de nombreux théorèmes; par exemple :

La droite qui joint deux points conjugués dans un système s enveloppe une courbe unicursale de classe $n-2$, d'ordre $2n-3$, qui touche la proposée en $3n-8$ points.

Je signalerai aussi l'étude des courbes d'ordre $n-3$, menées par k points doubles de la courbe de genre un, et dont les autres points d'intersection avec celle-ci sont deux à deux conjugués dans un même système : ces courbes se répartissent en $[\frac{1}{2}(n-3)n-k]^2$ systèmes, et les courbes de chaque système forment un faisceau.

Appliquées aux courbes du cinquième degré, ces propositions donnent des résultats simples; ainsi :

Les coniques menées par quatre points doubles d'une courbe de degré cinq et de genre un la coupent en deux points mobiles : la droite qui joint ceux-ci enveloppe une conique qui touche la proposée en cinq points; les cinq points de contact et les cinq points doubles de la proposée sont sur une cubique.

15. Le Mémoire 3 se termine par une étude détaillée des *cycliques*, ou courbes anallagmatiques du quatrième degré : c'est surtout la considération des systèmes de points conjugués qui me conduit à des résultats nouveaux; le suivant sert de base à toute une théorie des cycliques homofocales :

Le lieu des centres des cercles de rayon nul qui passent par deux points d'une cyclique, conjugués dans un système donné, est une cyclique homofocale.

Si l'on appelle *pôles principaux* les quatre points par rapport auxquels la courbe est anallagmatique :

Les huit points à distance finie communs à deux cycliques homofocales sont sur une cubique circulaire qui contient les quatre pôles principaux et les points d'intersection des droites les joignant deux à deux.

Les tangentes menées en ces huit points à une des cycliques touchent une conique inscrite à la cyclique.

On retrouvera plus tard, appliquées à l'espace, les autres propriétés nouvelles des cycliques planes ; le théorème suivant mérite toutefois d'être signalé :

Les bissectrices de tout système de cordes communes à une cyclique et à un cercle coïncident avec les bissectrices des droites qui joignent le centre du cercle à deux points fixes (qui sont les deux foyers singuliers réels de la cyclique).

16. La Note 7 donne des propriétés des couples de points conjugués dans un des douze systèmes (semi-principaux) pour lesquels s est égal à un quart de période, en exceptant les quatre demi-périodes qui correspondent aux systèmes principaux. A chaque système semi-principal est lié un point o (semi-pôle), et les conjugués des quatre points où la cyclique est coupée par une droite quelconque issue de o, sont sur une seconde droite passant aussi par o. Le segment déterminé par deux points conjugués dans un système semi-principal est divisé harmoniquement par deux droites fixes concourant au semi-pôle correspondant.

17. Dans la Note 10, j'applique aux courbes unicursales une méthode analogue à celle qui m'a donné l'équation des adjointes d'une courbe de genre un ; j'arrive ainsi, étant connue la représentation paramétrique d'une courbe unicursale d'ordre n, à trouver directement, de la manière la plus simple, ses courbes adjointes d'ordres $n-2$ et $n-1$.

III. — Courbes algébriques planes rectifiables.

18. Le Mémoire 11 et la Note 12 ont pour objet la solution du problème suivant :

Déterminer toutes les courbes algébriques planes dont l'arc est une fonction : 1° algébrique; 2° rationnelle des coordonnées.

La première partie ne présente aucune difficulté : il est clair que les courbes *d'arc algébrique* sont les développées des courbes algébriques planes; les courbes *d'arc rationnel* offrent plus d'intérêt, et j'arrive, en m'appuyant sur des résultats de Laguerre, à cette proposition simple :

Les courbes algébriques planes dont l'arc s'exprime rationnellement en fonction des coordonnées sont les caustiques par réflexion des courbes algébriques planes, pour des rayons incidents parallèles, et réciproquement.

La réciproque, toutefois, souffre une exception lorsqu'on peut mener à la courbe réfléchissante deux tangentes rectangulaires, de tous les points d'une droite normale aux rayons lumineux.

19. A titre d'exemple : les épicycloïdes ou hypocycloïdes algébriques dont l'arc est rationnel s'obtiennent en prenant, comme rapport du rayon du cercle mobile au rayon du cercle fixe, une fraction irréductible, de dénominateur pair.

L'hypocycloïde à quatre rebroussements appartient à cette classe; j'établis qu'elle est la caustique par réflexion de l'hypocycloïde à trois rebroussements pour des rayons parallèles à un des axes de symétrie de celle-ci.

Pour une courbe d'arc rationnel, de genre supérieur à zéro et d'ordre n, l'expression de l'arc, en fonction des coordonnées x, y, de son extrémité mobile, est de la forme

$$s = \frac{P(x, y)}{C(x, y)},$$

$C(x,y)$ désignant le premier membre de l'équation d'une courbe adjointe quelconque d'ordre $n-3$, et $P(x,y)$ le premier membre de l'équation d'une adjointe d'ordre $n-2$, passant par les points où $C = 0$ coupe la proposée.

IV. — Quartiques planes.

20. On sait qu'il existe soixante-trois systèmes, simplement infini chacun, de coniques quadritangentes à la courbe plane d'ordre quatre sans point singulier : je montre, dans le Mémoire 13, que deux de ces systèmes jouent, vis-à-vis l'un de l'autre, deux rôles différents selon la nature des coniques décomposées (couples de bitangentes) qu'ils renferment.

Dans les deux cas. — Toute cubique menée par les huit points de contact de deux coniques de systèmes différents coupe la quartique en quatre points nouveaux, qui sont les points de contact d'une conique quadritangente d'un troisième système ; inversement, les douze points de contact de trois coniques, C_1, C_2, C_3, appartenant respectivement à ces trois systèmes sont sur une cubique, Σ.

Dans le premier cas. — Les trois coniques C_1, C_2, C_3 sont doublement tangentes à une même conique, et les six points de contact sont sur la cubique Σ.

Dans le second cas. — Les trois coniques C_1, C_2, C_3, prises deux à deux, ont douze points d'intersection, parmi lesquels trois sont en ligne droite et sont situés sur la cubique Σ.

21. Ces résultats sont obtenus par une méthode purement algébrique, qui dérive de mes recherches sur la surface de Kummer ; on verra plus loin (n° 72) l'analyse d'un autre travail, où je rattache les courbes du quatrième ordre (ou de quatrième classe), à une intéressante surface du sixième degré, liée elle-même aux fonctions abéliennes de trois variables.

V. — Sujets divers.

22. Le Mémoire 14 donne une interprétation géométrique simple de l'*équation modulaire* pour la transformation du troisième ordre des fonctions elliptiques.

Soit une cubique plane unicursale quelconque; les quatre tangentes qu'on peut lui mener d'un point arbitraire la coupent de nouveau en quatre points : le rapport anharmonique des droites qui joignent à ces quatre points le point double de la cubique et le rapport anharmonique des quatre tangentes primitives sont liés par l'équation modulaire de la transformation du troisième ordre.

Cette équation est, en désignant par ρ et σ les deux rapports considérés :

$$\sqrt[4]{\rho\sigma}+\sqrt[4]{(1-\rho)(1-\sigma)}=1;$$

je vérifie directement ce résultat pour la cubique

$$x^3+3\lambda^2xy^2+3x^2+y^2=0,$$

ce qui me donne, pour ρ et σ, ces expressions rationnelles, satisfaisant à l'équation modulaire ci-dessus :

$$\sigma=\frac{(\lambda-1)^3(3\lambda+1)}{(\lambda+1)^3(3\lambda-1)}, \qquad \rho=\frac{(\lambda-1)(3\lambda+1)^3}{(\lambda+1)(3\lambda-1)^3}.$$

L'équation modulaire entre ρ et σ, c'est-à-dire entre les k^2 et k_1^2 de Legendre, est donc de genre zéro.

La Note 14 indique une interprétation géométrique différente pour l'équation modulaire générale, à l'aide des polygones de Poncelet.

23. Enfin, en appelant *sommets doubles* dans une série de polygones de Poncelet ceux des quatre polygones de la série qui sont repliés sur eux-mêmes, en excluant toutefois certains sommets bien définis, j'établis (15) que :

Le centre harmonique des sommets d'un polygone quelconque de la série par rapport à une droite donnée est un point fixe, si cette droite contient deux sommets doubles.

DEUXIÈME SECTION.

LE THÉORÈME D'ABEL ET QUELQUES-UNES DE SES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

I. — Formules analytiques.

24. La première formule relative au théorème d'Abel, et qui revient d'ailleurs dans certains cas à une formule antérieurement connue, est établie, sous différentes formes, dans les Mémoires 17 et 18; elle peut être présentée ainsi :

Soit C une courbe plane ou gauche; on considère une intégrale abélienne quelconque, I, appartenant à la courbe, et mise sous forme homogène

$$I = \int \frac{Q(x,y,z,t)}{S(x,y,z,t)}(t\,dx - x\,dt)$$

et l'on coupe la courbe C par un système de surfaces

$$\Phi(x,y,z,t,u) = 0,$$

dépendant algébriquement d'un paramètre u :

La somme des intégrales I *dont les limites inférieures et supérieures sont respectivement les points d'intersection de la courbe* C *avec deux surfaces du système* Φ, *correspondant aux valeurs* u_0 *et* u *du paramètre, a pour expression*

$$\Sigma I = \int_{u_0}^{u} (\Sigma r)\,du,$$

Σr désignant la somme des résidus, par rapport aux zéros de S, de la fonction

$$\frac{Q(x,y,z,t)}{S(x,y,z,t)}\,\frac{\Phi'_u}{\Phi}(x't - xt'),$$

où x, y, z, t désignent les coordonnées d'un point de C exprimées en

fonction (*thêtafuchsienne* par exemple) d'une même variable; x' et t' sont les dérivées de x et t.

La formule s'applique même au cas où les polynomes Q et S contiennent le paramètre μ.

Pour le calcul des résidus, il n'est pas nécessaire de connaître explicitement les expressions de x, y, z, t en fonction d'une variable; la formule n'introduit en effet que des éléments *géométriques* de la courbe C.

Une conséquence importante est la suivante :

La somme des intégrales I, *dont les limites inférieures et supérieures sont respectivement les points d'intersection de la courbe* C *avec deux surfaces quelconques de même ordre, est nulle, si, parmi les surfaces du faisceau déterminé par les deux surfaces sécantes, il en est une,* Σ, *qui passe par tous les points de la courbe* C *rendant l'intégrale infinie : quand un point est un infini d'ordre h pour la quantité sous le signe* $\int$, *la surface* Σ *doit avoir au même point, avec* C, *un contact d'ordre* $h - 1$.

Parmi d'autres corollaires analogues, s'appliquant, en particulier, aux intégrales de seconde espèce, on peut en signaler un, que j'ai d'ailleurs établi (20) par une méthode élémentaire :

La somme des valeurs que prend une fonction rationnelle des coordonnées, homogène et de degré zéro $Q(x, y, z) : V(x, y, z)$, *aux points communs à une courbe plane* $f = 0$ *et à chacune des courbes d'un faisceau ponctuel, reste constante, si les courbes du faisceau qui passent* respectivement *par les points d'intersection des courbes* $f = 0$, $V = 0$, *rendant* $Q : V$ *infini, ont en chacun de ces points, avec* f, *un contact d'un ordre au moins égal à la différence des ordres des contacts entre la courbe* f *et les courbes* V *et* Q *au même point.*

Si la courbe $Q = 0$ ne passe pas par le point considéré, l'ordre de son contact avec f sera regardé comme égal à -1.

Des propositions de même nature s'appliquent à l'espace (18).

25. Sommes de Jacobi. — Une autre série de formules se rapporte à l'expression de sommes remarquables : étant données, en coordonnées cartésiennes, trois surfaces, d'ordres m, n, p, si l'on désigne par Δ

leur jacobien et si $Q(x, y, z)$ est un polynome d'ordre $m+n+p-4$ au plus, Liouville et Clebsch ont montré que la somme

$$\sum \frac{Q}{\Delta},$$

étendue aux points communs aux trois surfaces, est nulle, et Jacobi avait établi le théorème correspondant pour le plan. Or, du théorème de Jacobi, Clebsch a déduit une démonstration du théorème d'Abel dans le cas des intégrales de première espèce : cette liaison entre les deux propositions m'a fait penser qu'on pourrait sans doute, à l'aide de l'expression générale indiquée plus haut pour le théorème d'Abel, arriver à évaluer la somme Σ, lorsque le degré du polynome Q dépasse $m+n+p-4$. C'est en effet ce que j'ai pu faire et j'ai donné une *formule* qui ramène la somme cherchée à une autre, étendue seulement aux points situés à l'infini sur la courbe d'intersection de deux des trois surfaces proposées.

Par exemple, si Q est d'ordre $m+n+p-3$, la somme cherchée a pour expression, en désignant par $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$ les équations des trois surfaces primitives

$$\sum \frac{xQ}{\psi[f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y]},$$

la nouvelle somme s'étendant aux points à l'infini de la courbe $f=0$, $\varphi=0$. On voit ainsi que la somme Σ ne dépend que des termes des degrés les plus élevés dans les polynomes Q, f, φ et ψ; de plus, la manière dont elle dépend des coefficients du polynome ψ est mise nettement en évidence. Il va sans dire qu'on obtient pour Σ deux autres expressions analogues en permutant f, φ et ψ.

Si le degré de Q dépasse $m+n+p-3$, la formule est analogue, bien qu'un peu plus compliquée.

Enfin des formules de même nature expriment les sommes plus générales où Q est une *fonction rationnelle :* on comprendra l'intérêt de ces résultats, si l'on remarque que les sommes considérées s'introduisent quand on cherche à étendre le théorème d'Abel aux *intégrales multiples*.

C'est ainsi que j'ai été conduit, relativement aux intégrales doubles,

à des théorèmes de même nature que ceux rappelés plus haut pour les intégrales simples; par exemple :

1° *La somme algébrique des valeurs que prend une intégrale double abélienne, appartenant à une surface algébrique* S, *dans les polygones curvilignes découpés sur cette surface par deux surfaces quelconques d'un premier faisceau ponctuel et deux surfaces quelconques d'un deuxième faisceau, est égale à zéro, s'il existe une surface* Σ, *formée par l'ensemble d'une surface du premier faisceau et d'une surface du second, passant par tous les points de la surface primitive* S, *qui rendent l'élément de l'intégrale infini; de plus* Σ *doit avoir avec* S, *en tout point de cette surface qui est un infini d'ordre* l *pour l'élément de l'intégrale, un contact d'ordre* $l-1$.

2° *La somme algébrique des valeurs que prend une intégrale double abélienne appartenant à une surface algébrique,* S, *dans les polygones découpés sur cette surface par deux surfaces quelconques d'un premier faisceau* $\Phi_1 + u\,\Phi_2 = 0$, *et deux surfaces quelconques d'un deuxième faisceau* $\Psi_1 + v\,\Psi_2 = 0$, *est une fonction entière du paramètre* u, *et une fonction rationnelle et logarithmique du paramètre* v, *si la surface* $\Phi_2 = 0$ *du premier faisceau passe par tous les points de* S *qui rendent l'élément de l'intégrule infini.*

Si la surface $\Psi_2 = 0$, *du second faisceau, satisfait également à la même condition, la somme précédente est une fonction entière des deux paramètres* u *et* v.

La plupart des résultats géométriques qui suivent sont des applications de ces formules ou propositions.

II. — Propriétés métriques diverses.

26. De la proposition du n° 24 dérivent, entre autres conséquences simples, les suivantes :

Le centre des moyennes distances des points communs à une courbe algébrique plane fixe et aux courbes d'un faisceau est un point fixe, si chaque asymptote de la courbe est asymptote à l'une des courbes du faisceau.

A une courbe algébrique plane, ayant toutes ses asymptotes d'inflexion, on mène des tangentes par un point quelconque : le centre des moyennes distances des points de contact est un point fixe. Ce point est également le centre des moyennes distances des points de contact, avec la proposée, des tangentes communes à cette courbe et à une courbe algébrique quelconque.

La somme des carrés des distances d'un point quelconque aux tangentes communes à deux courbes algébriques reste constante quand l'une de ces courbes varie en conservant ses foyers et les directrices correspondantes : par directrice, j'entends la droite qui joint les points de contact des deux tangentes isotropes issues d'un foyer.

Je signale, enfin, ce théorème que j'ai communiqué verbalement à la Société Mathématique :

Si la somme des carrés des normales qu'on peut abaisser d'un point sur une surface algébrique fixe demeure constante, le lieu de ce point est une surface du second ordre; les surfaces du second ordre qu'on obtient ainsi, en faisant varier la valeur de la somme constante, sont concentriques et homothétiques.

III. — Propriétés angulaires.

27. Elles se rattachent à la notion d'*orientation* dans le plan, due à Laguerre : deux systèmes de n droites ont même orientation lorsque la somme des angles que font les n droites avec un axe fixe est la même pour les deux systèmes, à un multiple près de π.

Je donne à ce sujet (23, 24) un théorème fondamental :

Pour qu'un système de n droites, variable algébriquement, garde une orientation fixe, il faut et il suffit que, lorsqu'une ou plusieurs droites du système viennent à passer par un des points cycliques du plan, d'autres droites du système, en même nombre, passent au même instant par l'autre point cyclique.

Voici quelques conséquences :

Les systèmes de tangentes menées d'un point à deux courbes de

même classe ont même orientation si le point est foyer d'une des courbes du faisceau tangentiel déterminé par les deux premières, et réciproquement.

Cette propriété définit d'une manière simple le lieu des foyers des courbes d'un faisceau tangentiel, déterminé par deux courbes A et B, de classe n : si l'on joint un point du lieu aux n foyers réels de A et aux n foyers réels de B, les deux systèmes de droites ont même orientation. On retrouve ainsi, à un point de vue différent, des courbes remarquables rencontrées par M. Darboux. De plus :

Le centre harmonique, par rapport à un point du plan, des n foyers réels d'une courbe, variable dans un faisceau tangentiel, décrit un cercle.

28. A cet ordre d'idées se rattache un problème intéressant :

Trouver, si elles existent, toutes les courbes algébriques, telles que le système des tangentes qu'on peut mener d'un point à l'une d'elles ait une orientation fixe, indépendante de la position du point dans le plan.

Je montre que *ces courbes sont celles qui n'ont pas de foyer à distance finie;* leur équation, en coordonnées tangentielles rectangulaires, est

$$(u^2+v^2)f_{n-2}(u, v, w) = F_n(u, v),$$

f_{n-2} et F_n étant des polynomes *homogènes* quelconques, de degré marqué par l'indice. Dans cette catégorie rentrent toutes les *hypocycloïdes algébriques* obtenues en faisant rouler un cercle à l'intérieur d'un cercle plus grand; et, en particulier, l'hypocycloïde à trois rebroussements, dont j'ai fait, à ce point de vue, une étude assez complète.

Si, par un point M *du plan, on mène les tangentes à une de ces courbes, le centre harmonique des points de contact par rapport à* M *coïncide avec ce point.*

29. Toutes ces propriétés d'orientation ne semblent pas pouvoir s'étendre à l'espace d'une manière simple; je citerai seulement deux résultats :

1° Soit un faisceau tangentiel de surfaces de classe n : il existe des

droites jouissant de cette propriété que l'orientation du système des n plans tangents, menés par l'une d'elles à une surface du faisceau, demeure fixe quand la surface varie ; ces droites forment un complexe d'ordre $2n-1$.

La surface des singularités du complexe est le lieu des lignes focales des surfaces du faisceau ; les droites singulières sont les tangentes de ces focales.

2° Si une surface algébrique a toutes ses focales à l'infini, c'est-à-dire si son équation en coordonnées tangentielles rectangulaires est du type

$$F_n(u, v, w)-(u^2+v^2+w^2)f_{n-2}(u, v, w, p)=0,$$

l'orientation des n plans tangents qu'on peut lui mener par une droite quelconque est la même que celle des n plans, menés par la droite parallèlement à n directions fixes.

IV. — Arcs des courbes de direction.

30. Les courbes de direction sont, d'après Laguerre, les enveloppes de droites ayant un sens déterminé ; leur équation générale, en coordonnées tangentielles rectangulaires, est $u^2+v^2=R^2(u, v)$, R étant une fonction rationnelle de u et v.

L'arc d'une telle courbe s'exprime par une intégrale abélienne *appartenant à la courbe ;* les formules du théorème d'Abel s'appliquent donc immédiatement à l'expression de la somme des arcs interceptés, par deux courbes quelconques de même degré, sur une courbe de direction fixe.

Le Mémoire 17, après quelques généralités sur les courbes de direction, contient la détermination des lignes de direction du troisième degré : ce sont les courbes représentées en coordonnées polaires, par les équations

$$\rho^3\cos 3\omega=a^3; \qquad \rho^{\frac{1}{3}}\cos\tfrac{1}{3}\omega=a^{\frac{1}{3}};$$

l'application des formules générales donne ensuite, relativement aux arcs, de très nombreux résultats dont voici les plus saillants :

31. *Sur une courbe de direction n'ayant que des asymptotes distinctes, non isotropes, la somme algébrique des arcs interceptés par deux courbes quelconques d'un même degré est egale à la somme des segments que ces courbes interceptent sur les asymptotes de la proposée.*

Ce théorème s'applique, par exemple, aux courbes

$$\rho^{2n+1}\cos(2n+1)\omega = a^{2n+1},$$

où n est un entier non négatif.

Sur une courbe de direction d'ordre $2n$, admettant comme point multiple d'ordre n, à tangentes distinctes, chacun des deux points cycliques du plan, la somme des arcs interceptés par deux courbes quelconques d'un même degré est égale à la somme des arcs que ces courbes interceptent sur n cercles, liés invariablement à la proposée.

Ce dernier théorème, lorsque les courbes sécantes sont deux droites, généralise une des propriétés fondamentales du cercle, celle de la *mesure des angles* :

La somme algébrique des arcs interceptés sur la courbe de direction précédente par les deux côtés d'un angle est proportionnelle à la grandeur de cet angle et indépendante de sa position dans le plan.

32. Parmi les courbes de direction, il en est de particulièrement remarquables : en cherchant, en effet, à déterminer les courbes algébriques sur lesquelles l'arc est une intégrale abélienne *de première espèce*, j'ai trouvé que ce sont les courbes de direction n'ayant pas d'autre point à l'infini que les points circulaires; il faut et il suffit, de plus, qu'en chacun de ces deux points multiples, suivant la terminologie connue d'Halphen, la courbe ne présente que des cycles dont la classe surpasse l'ordre [1]. Par exemple, si les tangentes aux points

[1] Un *cycle* est, d'après Halphen, l'ensemble des branches d'une courbe qui correspondent, en un point de cette courbe, à une même valeur de la variable auxiliaire, à l'aide de laquelle les coordonnées s'expriment d'une manière uniforme aux environs du point considéré.

L'*ordre* du cycle est le nombre de points confondus avec l'origine du cycle dans le

circulaires sont distinctes, chacune d'elles devra être tangente d'inflexion pour la branche correspondante.

Sur une de ces courbes remarquables, deux courbes quelconques d'un même degré interceptent des arcs dont la somme algébrique est nulle.

On ne rencontre pas de courbe de cette nature avant le sixième degré; la plus simple a pour équation polaire $\rho^3 = a^3 \cos 3\omega$, les courbes

$$\rho^n = a^n \cos n\omega$$

appartiennent à la même catégorie, si n désigne un entier impair, supérieur à 3, ou une fraction de la forme $\frac{2p+1}{2q+1}$, p étant entier, positif et supérieur à l'entier positif q.

La courbe $\rho^3 = a^3 \cos 3\omega$ est de genre *un;* son arc est donc l'intégrale elliptique de première espèce *correspondante :* W. Roberts avait déjà observé que l'arc s'exprime par une intégrale elliptique de première espèce, mais sans remarquer que cette intégrale appartient à la courbe.

33. Le Mémoire 17 contient quelques propriétés relatives aux centres de gravité des arcs des courbes de direction; en voici une, à titre d'exemple :

Les arcs interceptés sur une courbe de direction par deux courbes quelconques d'un même degré ont une somme algébrique nulle, et le centre de gravité des arcs positifs coïncide avec celui des arcs négatifs, si la courbe de direction considérée n'a pas d'autres points à l'infini que les points circulaires, et si elle ne présente, en chacun d'eux, que des cycles dont la classe surpasse le triple de l'ordre.

Ce théorème s'applique, en particulier, aux courbes $\rho^n = a^n \cos n\omega$, si n est un entier impair, égal ou supérieur à 5.

nombre total des points d'intersection de la courbe et d'une droite différente de la tangente au cycle; si cette droite est la tangente, le nombre des points d'intersection confondus avec l'origine du cycle est égal à la somme de l'ordre et de la *classe* de ce cycle.

Dans un autre ordre d'idées, les courbes de direction donnent lieu à ce théorème :

Toute ligne de courbure plane, non multiple, d'une surface algébrique est une courbe de direction, lorsque l'angle, nécessairement constant, sous lequel son plan coupe la surface n'est ni nul ni droit.

V. — Aires sphériques.

34. Voici les deux résultats fondamentaux sur cette question (18) :

Soient deux surfaces quelconques de même ordre p, et deux autres surfaces de même ordre q : la somme algébrique des $2pq$ aires que ce système découpe sur une sphère de rayon R est égale à $2\rho Rd$; ρ étant un coefficient dépendant uniquement du système des quatre surfaces primitives, et d désignant la distance du centre de la sphère à un plan lié invariablement à ce système.

Un système, composé de deux surfaces quelconques de même ordre et de deux autres surfaces asymptotiques entre elles, découpe sur une sphère des aires dont la somme algébrique reste fixe pour toutes les positions de la sphère dans l'espace : elle est égale au produit du rayon par un paramètre qui dépend uniquement des surfaces primitives.

Ce paramètre est d'ailleurs nul si les deux premières surfaces sont asymptotiques entre elles, ou si les deux secondes, au lieu d'être asymptotiques, sont asymptotes : par *asymptotiques*, j'entends des surfaces qui ont mêmes points à l'infini; par *asymptotes*, des surfaces qui ont mêmes points à l'infini et mêmes plans tangents en ces points.

35. On comprend, sans qu'il soit utile d'en donner des exemples, à quelles variétés d'applications se prêtent ces deux théorèmes généraux; par une méthode élémentaire (26, 27, 28) j'ai établi des propositions de même nature, qui constituent l'extension à la sphère de la propriété si simple et si remarquable que présente la circonférence de cercle pour la *mesure des angles* situés dans son plan : la différence (ou la somme) des arcs interceptés par les deux côtés d'un angle α sur une circonférence de rayon R est égale à $2R\alpha$. Dans l'espace, ce

théorème n'est pas applicable sans modification à la différence des aires que découpe, sur une sphère, un angle solide ou un cône rencontrant cette surface suivant deux courbes fermées : la différence en question n'est pas seulement fonction du rayon de la sphère et de la forme du cône; mais il suffit, pour l'exprimer, d'introduire un nouvel élément, la distance du centre de la sphère à un plan passant par le sommet du cône et lié invariablement à ce cône. Donnons l'énoncé exact de la proposition :

36. Un cône découpe, sur une sphère concentrique de rayon un, deux aires symétriques; appelons *plan d'orientation* du cône le plan mené par le sommet normalement à la droite qui joint les centres de gravité de ces deux aires, et *module* le produit de la distance des deux centres de gravité par la valeur de l'angle conique.

La différence des deux aires que découpe, sur une sphère de rayon R, *un cône, dont toutes les génératrices coupent la sphère, est égale à* $2\rho Rd$, ρ *étant le module du cône et d la distance du centre de la sphère au plan d'orientation.*

L'application aux angles polyèdres et aux cônes du second ordre donne des résultats intéressants.

Le plan d'orientation et le module d'un angle trièdre se déterminent simplement : il suffit d'élever au sommet, sur chacune des faces et vers l'extérieur du trièdre, une normale égale à l'angle de la face, et de composer comme des forces les trois longueurs ainsi obtenues; la résultante est égale au module du trièdre et perpendiculaire à son plan d'orientation. Une construction semblable s'applique à un angle polyèdre quelconque. Comme conséquences, un angle trièdre trirectangle dont le sommet est sur une sphère, et dont l'axe (intersection des plans bissecteurs) passe par le centre de la sphère, découpe sur celle-ci une aire égale à $\pi R^2\sqrt{3}$; dans les mêmes conditions, un trièdre dont les faces sont de 60° découpe une aire égale au sixième de la sphère totale.

37. Les mêmes formules permettent d'évaluer simplement sur la sphère une aire quelconque limitée par des arcs de petits cercles; il

suffit pour cela de savoir calculer la surface de la lunule comprise entre deux petits cercles, et je donne à cet effet une expression très simple.

38. La valeur du module d'un cône du second ordre me permet de calculer le différence des aires découpées sur une sphère par une quadrique; on arrive ainsi à des résultats curieux et inattendus.

Soit $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = K$ l'équation d'une quadrique rapportée à son centre et à ses axes; appelons *module correspondant au plan principal* $z = 0$ la valeur absolue de la quantité

$$\frac{2\pi P}{\sqrt{(M-P)(N-P)}}$$

et définissons de même les modules correspondant aux deux autres plans principaux.

Deux de ces modules sont réels, le troisième est imaginaire.

Supposons maintenant que la quadrique coupe une sphère de rayon R *suivant deux courbes fermées; le cône du second ordre qui passe par cette intersection. et dont le sommet est intérieur à la sphère, a son axe intérieur normal à un des plans principaux de la quadrique; soit* Π *ce plan.*

La différence des deux aires découpées par la quadrique sur la sphère a pour valeur $2\rho Rd$, ρ *désignant le module correspondant au plan* Π; *et* d *la distance du centre de la sphère à ce plan.*

Dans le cas d'une quadrique de révolution, le plan Π est toujours celui de l'équateur; et si la méridienne est une parabole, je montre que :

La différence des deux aires que découpe sur une sphère un paraboloïde de révolution est égale à $4\pi Rp$, p *désignant le paramètre de la parabole méridienne : cette différence est donc indépendante des positions des deux surfaces dans l'espace, pourvu toujours que le paraboloïde coupe la sphère suivant deux courbes fermées.*

39. Les *pinceaux de droites* donnent lieu à une formule analogue aux précédentes. Appelons *ouverture* du pinceau le double de l'aire

découpée sur une sphère de rayon un par le faisceau des droites menées du centre de la sphère parallèlement aux droites du pinceau : la somme algébrique des deux aires que découpe un pinceau sur une sphère est le double produit du rayon par l'ouverture et par la distance du centre de la sphère au plan de symétrie des deux points focaux du pinceau. De même, la somme algébrique des deux aires découpées sur une sphère, par un pinceau de droites parallèles à un plan, est égale au produit du rayon par un coefficient constant, qui ne dépend que de la nature du pinceau.

On déduit de là des propositions intéressantes relatives à la somme ou à la différence des aires que découpent sur une sphère certaines surfaces réglées ; ainsi, pour un conoïde, cette somme est le produit du rayon par un coefficient qui ne dépend que de la forme du conoïde, et c'est là une généralisation directe du théorème de la mesure des angles.

VI. — Aires ellipsoïdales.

40. Divers géomètres ont essayé d'étendre aux aires, sur l'ellipsoïde, les propriétés classiques si simples et si élégantes des arcs d'ellipse, mais aucun résultat net n'avait été obtenu. Les tentatives les plus heureuses ont été celles de Jellett et de Lebesgue, que nous allons résumer.

Appelons, sur l'ellipsoïde, *parallèle*, d'axe D et d'angle φ, le lieu des points de la surface où la normale fait un angle φ avec une droite D issue du centre ; un parallèle se compose de deux boucles fermées, symétriques par rapport au centre, et l'aire ellipsoïdale comprise entre elles est l'*aire du parallèle*.

Jellett et Lebesgue ont montré que tout parallèle *dont l'axe est un des axes de l'ellipsoïde* a une aire exprimable par les fonctions elliptiques ; de plus, si les angles φ, φ', φ'' de trois parallèles, ayant respectivement pour axes les trois axes a, b, c de la surface, vérifient les relations

$$\frac{1}{a}\tang\varphi = \frac{1}{b}\tang\varphi' = \frac{1}{c}\tang\varphi'',$$

les différences de leurs aires deux à deux s'expriment algébriquement :

c'est une extension directe du théorème de Fagnano pour les arcs d'ellipse, mais elle est encore engagée, on le voit, dans des formules algébriques.

41. Voici maintenant ce que j'ai ajouté à cette théorie :

Le théorème de Fagnano est un cas particulier d'une proposition plus générale et plus élégante, connue sous le nom de THÉORÈME DE GRAVES. *Sur une ellipse* E_1, *extérieure et homofocale à une ellipse* E, *on prend un point quelconque* C, *par lequel on mène les deux tangentes à* E; *soient* T *et* T' *leurs points de contact : l'excès de la somme des longueurs de ces tangentes, limitées au point* C *d'une part et aux points* T *et* T' *d'autre part, sur l'arc de l'ellipse intérieure compris entre les points de contact, est constant.*

C'est précisément ce théorème de Graves que j'ai étendu, presque mot pour mot, aux aires ellipsoïdales, et cela sous la forme suivante :

Sur un ellipsoïde E_1, *extérieur et homofocal à un ellipsoïde* E, *on prend une conique quelconque* C, *dont le plan passe par le centre, et l'on circonscrit à cette conique et à* E *une développable; soient* T *et* T' *les deux boucles de la courbe de contact de la développable et de l'ellipsoïde intérieur : l'excès de l'aire de la développable, limitée à la conique* C *d'une part et aux boucles* T *et* T' *d'autre part, sur l'aire ellipsoïdale comprise sur* E *entre ces deux mêmes boucles, est constant.*

L'excès constant s'exprime simplement par les fonctions elliptiques. Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2+\theta} + \frac{y^2}{b^2+\theta} + \frac{z^2}{c^2+\theta} - 1 = 0,$$

les équations des ellipsoïdes E et E_1; introduisons les fonctions de Weierstrass correspondant aux racines

$$e_1 = 1 - \frac{3b^2c^2}{\rho}, \qquad e_2 = 1 - \frac{3a^2c^2}{\rho}, \qquad e_3 = 1 - \frac{3a^2b^2}{\rho},$$

étant posé

$$\rho = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2;$$

l'excès constant a pour valeur

$$-2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\left[\zeta u + u - \sqrt{\frac{3(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}{\theta\rho}}\right],$$

u étant le plus petit argument positif défini par l'équation

$$\mathrm{p}u - 1 = \frac{3a^2b^2c^2}{\theta\rho}.$$

Toutes les démonstrations ont pour base mes formules sur les sommes de Jacobi (n° 25).

Si l'on observe que les deux boucles T et T' constituent un parallèle, on en déduit l'expression générale de l'aire d'un parallèle.

42. Le théorème de Jellett et Lebesgue est un cas particulier du mien; on l'obtient en prenant successivement, pour la conique C, les trois coniques principales de E_1.

43. On peut trouver sur l'ellipsoïde d'autres aires réductibles aux fonctions elliptiques.

En premier lieu, soit une sphère de centre l, m, n et de rayon R, extérieure à l'ellipsoïde; circonscrivons à ces deux surfaces une développable : l'aire comprise sur l'ellipsoïde, entre les deux boucles de la courbe de contact avec la développable, est égale, *à une quantité algébrique près*, à

$$2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta v + v),$$

où v est le plus petit argument positif défini par $\mathrm{p}v - 1 = \dfrac{3a^2b^2c^2}{\theta\rho}$, et θ la racine positive de l'équation

$$\frac{l^2}{a^2+\theta} + \frac{m^2}{b^2+\theta} + \frac{n^2}{c^2+\theta} = \frac{R^2}{\theta}.$$

Dans le cas où la sphère a son centre sur un des axes de l'ellipsoïde, Ox par exemple, j'arrive à l'expression *complète* de l'aire ellipsoïdale correspondante

$$2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta w + w) - 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\mathrm{p}w - 1)\frac{\sigma_1 w\, \sigma w}{\sigma_2 w\, \sigma_3 w}$$
$$- 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,\frac{a^2}{l^2}\left(\frac{\sigma_1 w\, \sigma w}{\sigma_2 w\, \sigma_3 w}\right)^3(3e_1\mathrm{p}w + e_1^2 + 2e_2e_3),$$

l désignant l'abscisse du centre de la sphère et w étant le plus petit argument positif défini par

$$pw - 1 = 3\frac{l^2 - R^2}{R^2}\frac{b^2c^2}{\rho}.$$

En second lieu, si l'on appelle *zone ellipsoïdale* la zone limitée sur un ellipsoïde par deux coniques, le long de chacune desquelles on peut circonscrire à la surface un cône de révolution, l'aire d'une telle zone s'exprime elliptiquement. Cette expression résulte du théorème suivant :

Soient x_1, z_1 *les coordonnées, dans le plan des* xz, *du sommet d'un cône de révolution circonscrit à l'ellipsoïde* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0\,(a > b > c)$; *l'excès de l'aire latérale de ce cône, limité à son sommet et à la conique de contact, sur l'aire de la calotte ellipsoïdale comprise à son intérieur, a pour expression*

$$\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u + u) - \Sigma_0,$$

Σ_0 *étant l'aire du demi-ellipsoïde, et* u *le plus petit argument positif défini, en fonction des coordonnées* x_1, z_1 *du sommet, par les relations compatibles*

$$x_1^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2(a^2 - c^2)}\frac{\rho}{3}(pu - e_3), \qquad z_1^2 = \frac{b^2 - c^2}{b^2(a^2 - b^2)}\frac{\rho}{3}(pu - e_1).$$

L'aire latérale du cône est algébrique et s'obtient aisément. Comme conséquence :

Les aires de deux zones ellipsoïdales ont une somme ou une différence exprimable algébriquement lorsque les quatre plans qui limitent ces zones touchent un ellipsoïde homothétique à l'ellipsoïde proposé.

Dans le cas où l'ellipsoïde devient un *paraboloïde elliptique,* les zones ont une aire exprimable rationnellement (31, 32) de la manière la plus simple.

VII. — Arcs des courbes algébriques.

44. L'arc d'une courbe algébrique quelconque n'est pas une intégrale abélienne *appartenant à cette courbe,* de sorte que la somme algébrique des arcs interceptés sur elle par une série de courbes mo-

biles ne pourra s'exprimer à l'aide des formules du théorème d'Abel : mais il en sera autrement si, *en tenant compte de l'équation de la courbe mobile*, on peut faire disparaître le radical dans l'élément d'arc de la courbe fixe.

Le théorème très général suivant résume cette théorie (33) :

Soit $\mathfrak{S}$ *une courbe algébrique, intersection totale ou partielle de deux surfaces,* $f=0$, $\varphi=0$, *sur aucune desquelles elle n'est multiple et qui ne se touchent pas le long de la courbe ; posons*

$$A=f'_y\varphi'_z-f'_z\varphi'_y,\qquad B=f'_z\varphi'_x-f'_x\varphi'_z\qquad C=f'_x\varphi'_y-f'_y\varphi'_x.$$

On coupe la courbe $\mathfrak{S}$ *par des surfaces ayant pour équation*

$$F^2-\Phi^2(A^2+B^2+C^2)=0,$$

F *et* Φ *désignant des polynomes quelconques en* x, y, z, t ; *la somme algébrique des arcs compris sur la courbe* $\mathfrak{S}$ *entre deux surfaces de ce système, obtenues en faisant suivre une loi de variation quelconque aux coefficients des polynomes* F *et* Φ, *est une fonction rationnelle des valeurs initiales et finales de ces coefficients.*

C'est également une fonction rationnelle des coefficients des deux surfaces f *et* φ, *pourvu toutefois que l'équation de la projection de* $\mathfrak{S}$ *sur un plan ait ses coefficients rationnels par rapport à ceux des deux surfaces.*

L'intérêt de ce théorème est que les *logarithmes*, qui figurent en général dans les formules du théorème d'Abel, disparaissent; il ne peut y avoir d'exception que si *toutes* les surfaces

$$F^2=0,\qquad (A^2+B^2+C^2)\Phi^2=0$$

passent par un même point à l'infini de la courbe $\mathfrak{S}$, et si ce point est un point du cercle isotrope ou un point de contact de la courbe et du plan de l'infini.

Enfin, une formule simple donne, dans tous les cas, l'expression de la somme des arcs considérés dans le théorème général.

45. De là se déduisent de très nombreuses conséquences, dont on va citer les plus simples.

A une courbe algébrique gauche C, *d'ordre* n, *on mène les tangentes qui font un angle donné avec un axe fixe et l'on fait ensuite varier cet angle : la somme algébrique des arcs parcourus sur* C *par les points de contact est à chaque instant égale à zéro.*

On mène à C *les plans normaux qui touchent une sphère, et l'on fait varier le rayon de cette sphère, son centre demeurant fixe : la somme algébrique des arcs parcourus sur* C *par les points d'incidence des plans normaux est égale à* $2n$ *fois la variation du rayon, ou à* $2(n-\nu)$ *fois cette variation si* C *a* ν *points à l'infini sur le cercle isotrope.*

Dans ces deux énoncés, on suppose que la courbe C ne touche pas le plan de l'infini.

A une courbe algébrique ne touchant pas le plan de l'infini en un point du cercle isotrope, on mène les plans normaux qui touchent une sphère, et l'on fait varier le centre de cette sphère, son rayon demeurant fixe : la somme algébrique des arcs parcourus sur la courbe par les points d'incidence des plans normaux est à chaque instant égale à zéro.

La deuxième proposition, appliquée à l'ellipse et à des sphères (ou cercles) *ayant le même centre que cette courbe*, est une des formes du théorème de Fagnano; dans toute sa généralité elle constitue donc une extension de ce théorème et peut s'énoncer ainsi :

Les huit pieds des normales qu'on peut mener à une ellipse, tangentiellement à un cercle intérieur à la développée, se groupent deux à deux de manière à déterminer sur l'ellipse quatre arcs, dont la somme algébrique est égale à quatre fois le rayon du cercle.

46. Dans le cas particulier des courbes planes, j'ai cherché à généraliser le théorème de Graves sur les arcs d'ellipse; ce théorème, cité plus haut, peut recevoir un autre énoncé : les quatre points de contact d'une ellipse, avec les tangentes communes à cette conique et à un cercle extérieur, se groupent deux à deux de manière à déterminer sur l'ellipse deux arcs, dont la somme algébrique est égale à celle des longueurs des tangentes communes.

Sous cette forme, j'ai reconnu (34, 36) que la proposition s'étend

sans modification à une courbe plane quelconque, par une démonstration tout élémentaire :

Les points de contact d'une courbe plane C, *de classe* ν, *avec les* 2ν *tangentes communes à cette courbe et à un cercle, se groupent deux à deux de manière à déterminer, sur* C, ν *arcs, dont la somme algébrique est égale à celle des longueurs des tangentes communes.*

Les tangentes communes sont supposées limitées au cercle d'une part et à la courbe d'autre part.

47. Le Mémoire 33 contient de nombreuses propriétés des arcs des cubiques gauches ou planes, des biquadratiques sphériques, de la lemniscate de Bernoulli ; par exemple :

Étant donnée une cubique gauche, on considère un quelconque des cônes du quatrième ordre, Σ, *qui ont leur sommet en un point de la cubique et qui passent par les* 8 *points de cette courbe où la tangente est isotrope. Le cône* Σ *admet* 63 *systèmes de cônes du second ordre, de même sommet, qui lui sont inscrits, c'est-à-dire le touchent suivant* 4 *génératrices : deux cônes inscrits d'un même système interceptent sur la cubique gauche quatre arcs dont la somme algébrique est rationnelle.*

Deux cercles passant par le centre d'une lemniscate interceptent sur cette courbe deux arcs égaux, si leurs centres sont sur une même conique, ayant pour foyers les foyers de la lemniscate.

Citons encore un théorème général :

Sur la courbe d'intersection de deux surfaces algébriques, on considère les points où les deux surfaces se coupent sous un angle donné, et l'on fait ensuite varier cet angle ; la somme algébrique des arcs décrits sur la courbe par les points considérés s'exprime rationnellement, en fonction de la tangente de l'angle variable et des coefficients des surfaces primitives.

TROISIÈME SECTION.

SURFACES ALGÉBRIQUES.

I. — Surfaces cyclides.

48. Les cyclides sont les surfaces du quatrième ordre qui ont pour ligne double le cercle isotrope à l'infini; elles sont l'objet, dans le Mémoire 37, d'une étude détaillée, *purement géométrique*, qui complète les beaux résultats donnés antérieurement par MM. Moutard, Darboux et Laguerre.

L'idée principale de ce Travail est l'introduction des *groupes de sphères* par rapport à une cyclide; on sait qu'une cyclide admet une série simplement infinie de quadriques inscrites, V, et que, par la biquadratique commune à la cyclide et à une sphère quelconque, passent quatre cônes, dont chacun est circonscrit à une surface V. Les sphères auxquelles répond ainsi une quadrique V, *donnée*, sont dites appartenir au *groupe* V *de sphères*, et cette notion entraine de nombreuses propriétés [1]. Une même sphère appartient à quatre groupes.

Toute tangente à une quadrique V coupe la cyclide, ainsi que l'a montré M. Darboux, en quatre points dont la détermination dépend de deux équations du second degré; les quatre points se divisent donc en deux couples et je dis que les deux points d'un couple sont *conjugués dans le système* V; enfin, un cercle bitangent à la cyclide appartient *au*

---

(1) Depuis la publication du Mémoire 37, qui remonte à 1885, j'ai reconnu, au cours de mes études sur la surface de Kummer, qu'aux sphères d'un même groupe par rapport à une cyclide, la transformation de Lie fait correspondre des droites qui appartiennent à un des complexes du second ordre, en nombre simplement infini, dont la surface de Kummer est la surface de singularité. Il n'est donc pas étonnant que la notion de sphères d'un même groupe m'ait donné d'intéressants résultats géométriques; ceux-ci d'ailleurs, pour la plupart, n'auraient pu se déduire des propriétés connues de la surface de Kummer et des complexes du second ordre correspondants.

groupe V si ses deux points de contact sont conjugués dans le système V.

49. Cela posé, voici quelques-unes des nombreuses propositions établies dans le Mémoire 37 :

Le lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant à un même groupe est une cyclide homofocale à la proposée.

Les biquadratiques communes à une cyclide et aux sphères d'un même groupe ont une de leurs lignes focales sur la cyclide, lieu des centres des sphères de rayon nul du groupe.

Toute sphère passant par un cercle bitangent du groupe V *appartient au groupe* V *de sphères.*

Les sphères d'une même série doublement tangentes à une biquadratique sphérique tracée sur une cyclide, et simplement tangentes à cette surface, la touchent suivant une ligne de courbure.

Les axes des cercles d'un même groupe V, *bitangents à une cyclide, touchent une quadrique* U, *homofocale aux quadriques déférentes de la cyclide.*

Les plans perpendiculaires en leurs milieux aux droites joignant deux points d'une cyclide conjugués dans le système V *enveloppent la quadrique* U *du théorème précédent.*

Les quadriques V *et* U *ont mêmes directions principales et les longueurs de leurs axes parallèles sont inversement proportionnelles.*

50. J'appelle *cubique principale* d'une cyclide le lieu des centres des quadriques V inscrites; de nombreux théorèmes se rattachent à cette courbe. Ainsi :

Si une section plane a un axe de symétrie, cet axe est une corde de la cubique principale; le plan mené par l'axe normalement au plan de section passe par un point fixe O *de la cubique.*

Réciproquement : *Un plan quelconque* P *issu de* O *coupe en outre la cubique en* l *et* m; *le plan mené par* l *et* m *normalement au plan* P *rencontre la cyclide suivant une courbe qui admet* lm *comme axe de symétrie.*

Les plans des courbes à deux axes de symétrie qu'on peut tracer sur la

cyclide enveloppent une développable, dont la podaire, par rapport au point O, *coïncide avec la cubique principale.*

Un plan quelconque coupe, suivant des courbes à un axe de symétrie, trois cyclides d'un système homofocal.

Soit O′ *le pied d'une normale menée du point* O *à un des cinq cônes du second ordre inscrits à la cyclide; le plan tangent en* O′ *à ce cône coupe la cyclide suivant deux cercles égaux, dont les centres sont équidistants de* O′ *et en ligne droite avec ce point.*

La normale en un point d'une cyclide et la corde de la cubique principale issue de ce point déterminent un plan qui passe par le point fixe O.

51. Je signalerai encore des propositions sur les normales, les lignes de courbure, les centres de courbure principaux d'une cyclide et, en particulier, des constructions très simples de ces centres pour un point donné de la surface. Le théorème suivant concerne la théorie des points conjugués.

Le lieu des conjugués d'un point a d'une cyclide, dans un système V, est la biquadratique commune à la surface et à une sphère qui la touche au point a; je montre que :

Les centres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *des sphères qui renferment les conjugués du point a dans les systèmes* $V_1, V_2, V_3, \ldots$ *déterminent sur la normale à la cyclide en a une division homographique à une division fixe; le rapport anharmonique de quatre de ces points est égal au rapport anharmonique, sur la cubique principale, des centres des quadriques* V *correspondantes.*

Ce théorème donne de nombreuses conséquences; la suivante complète un résultat de MM. Laguerre et Darboux :

Soient d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 *les centres des sphères bitangentes à la cyclide et dont un des points de contact est un point donné a de cette surface; les cinq points d sont respectivement sur les cinq quadriques déférentes. Si a décrit une ligne de courbure, ces cinq points et l'un des centres de courbure principaux de la cyclide en a déterminent, sur la normale en a, une division homographique à une division fixe.*

52. La note 38 traite un problème intéressant posé par M. Darboux. L'éminent Géomètre a montré qu'on peut déterminer les lignes de

courbure d'une cyclide quand on prend pour *absolu* (Cayley) une quelconque des quadriques V inscrites; je fais voir que ces lignes, quelle que soit la quadrique V choisie, *coïncident avec les lignes de courbure ordinaires*.

De ce résultat, transformé par corrélation, se déduit une détermination simple des lignes de courbure d'une surface remarquable étudiée par MM. Laguerre et Darboux :

La surface de quatrième classe et du douzième ordre, doublement inscrite dans un cône du second degré et ayant le cercle isotrope comme ligne double, admet une série simplement infinie de quadriques inscrites; chacune de ces quadriques, en dehors de sa courbe de contact, qui est du quatrième ordre, coupe la surface suivant une courbe du seizième ordre : ces courbes du seizième ordre sont les lignes de courbure de la surface.

II. — Surfaces du second ordre.

53. Le Mémoire 39 étend aux quadriques les notions de points conjugués et de groupes de sphères. Soit σ une conique quelconque du plan de l'infini passant par les quatre points communs à la quadrique et au cercle isotrope; une sphère appartient *au groupe* σ si un des quatre cônes qui passent par son intersection avec la quadrique contient la conique σ. Deux points de la quadrique sont *conjugués dans le système* σ si la droite qui les joint rencontre cette conique; enfin, un cercle bitangent à la quadrique fait partie *du groupe* σ si ses deux points de contact sont conjugués dans le système σ.

Toute sphère passant par un cercle bitangent du groupe σ *appartient au groupe* σ *de sphères.*

Le lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant à un même groupe est une quadrique homofocale à la proposée.

Les biquadratiques communes à une quadrique et aux sphères d'un même groupe ont une de leurs lignes focales sur la quadrique, lieu des centres des sphères de rayon nul du groupe.

Les deux focales α_1 *et* α_2 *d'une conique* α, *tracée sur une quadrique* E, *sont respectivement sur deux quadriques* E_1 *et* E_2, *homofocales à* E; *les*

cônes circonscrits aux quadriques E, E_1, E_2 *suivant les coniques* α, α_1, α_2 *sont concentriques et homofocaux.*

Les sphères d'une même série, bitangentes à une quadrique Q, *inscrite à* E, *appartiennent à un même groupe par rapport à* E; *de même pour les sphères inscrites à une quadrique de révolution bitangente à* E.

On peut toujours, bien que cela semble impossible a priori, *construire une quadrique inscrite à une quadrique donnée* E, *et bitangente à trois sphères appartenant à un même groupe par rapport à* E.

Les sphères d'une même série, doublement tangentes à une conique située sur une quadrique et simplement tangentes à cette surface, la touchent suivant une ligne de courbure, qui passe par les extrémités du diamètre conjugué du plan de la conique.

Parmi les sphères qui touchent les deux génératrices rectilignes passant par un point m d'une quadrique, on considère celles qui sont en outre tangentes à la surface : le lieu de leurs points de contact se compose des deux lignes de courbure de la quadrique qui se croisent en m.

On a ainsi une génération géométrique très simple des lignes de courbure; si, de plus, on désigne par a et b les points où la sphère touche les deux génératrices, par c celui où elle touche la quadrique, la ligne de courbure engendrée par c est normale en ce point au cercle qui passe par les points a, b, c.

Citons enfin une proposition analogue à un théorème rappelé plus haut à propos des cyclides :

Les lignes de courbure d'une quadrique restent les mêmes quand on prend pour absolu une conique quelconque, passant par les quatre points communs à la surface et au cercle isotrope, ou une conique quelconque passant par quatre ombilics situés dans un même plan principal.

On peut donner, pour une conique, une théorie des groupes de cercles analogue à la théorie des groupes de sphères (39).

54. Le Mémoire 41 est consacré à une question d'un ordre différent.

Il semble *a priori* qu'il y ait une infinité simple de quadriques indécomposables touchant respectivement en quatre points deux quadriques données; en réalité, je montre qu'il n'en est rien : si les deux

quadriques primitives ne satisfont pas à une condition initiale, il n'existe *aucune* surface du second ordre quadritangente à l'une et à l'autre; si la condition est vérifiée, il existe une *infinité double* de telles surfaces.

La condition initiale peut recevoir différentes formes.

Par exemple, si $A = o$ et $B = o$ sont les équations des deux quadriques primitives, il faut que le produit AB soit décomposable en une somme de quatre carrés, ou que les génératrices d'un système de A et celles d'un système de B appartiennent à un même complexe linéaire.

Si l'on désigne, suivant les notations classiques, par Δ, Θ, Δ', Θ' les invariants du système des deux quadriques, la condition initiale s'exprime analytiquement par $\Delta\Theta'^2 = \Delta'\Theta^2$. Quand elle est vérifiée, les surfaces du second ordre quadritangentes à A et B ont une équation de la forme $\lambda\mu C + \lambda E + \mu F - D = o$, λ et μ étant des paramètres arbitraires.

55. C'est la théorie des quadriques inscrites à une surface de Kummer qui m'a amené à poser le problème précédent; le lien entre les deux questions est exprimé par cette proposition :

Les surfaces du second ordre, quadritangentes à deux quadriques données et passant par un point donné, ont pour enveloppe une surface de Kummer.

Réciproquement, toute surface de Kummer est susceptible de ce mode de génération.

III. — Surfaces du troisième ordre.

56. En étudiant (43) un complexe remarquable de coniques, j'ai été conduit à quelques propriétés simples de la surface du troisième ordre.

Considérons cinq points de l'espace $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_5$ et les cubiques gauches en nombre doublement infini qui passent par ces points; le lieu des points de contact d'un plan quelconque avec les cubiques de

ce système est une *conique*. On définit ainsi un système trois fois infini, c'est-à-dire un *complexe* de coniques, dont il y a une et une seule dans chaque plan de l'espace, et je montre que, par un choix convenable du tétraèdre de référence, l'équation générale de ces coniques est

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda_4 t = 0,$$
$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \lambda_4 t^2 = 0,$$

les λ étant des paramètres arbitraires.

Les deux nouvelles coniques doubles de la surface développable circonscrite à deux coniques quelconques du complexe appartiennent également au complexe.

Les coniques du complexe dont les plans passent par un même point P *rencontrent chacune en six points une courbe d'ordre sept,* C_7, *qui passe par* P; *cette courbe est le lieu des points de contact des tangentes menées de* P *aux cubiques gauches qui contiennent les cinq points* ω.

Inversement, la courbe C_7 jouit de la propriété d'être coupée, par tout plan contenant P, en six nouveaux points situés sur une conique.

Je fais connaître de nombreuses propriétés de cette courbe, de sa projection sur un plan à partir d'un de ses points; par exemple, C_7 est anallagmatique par rapport à chacun des cinq points ω, quand on prend pour *absolu* une quelconque des coniques dont les plans passent par P et qui rencontrent la courbe en six points.

57. La théorie des *surfaces cubiques* se rattache à la précédente par deux propositions qui donnent deux générations simples de ces surfaces.

Le lieu des coniques du complexe dont les plans passent par une droite donnée δ, *est une surface du troisième ordre qui contient la droite.*

De plus, cette surface renferme les cinq points ω, et le plan tangent en chacun de ces points passe par la droite δ.

A toutes les cubiques gauches passant par les cinq points ω, *on mène, d'une droite donnée,* δ, *des plans tangents : le lieu des points de contact est la surface du troisième ordre précédente.*

On en déduit ces conséquences :

A deux coniques quelconques tracées sur une surface cubique, et dont les plans passent par une même droite δ de cette surface, on circonscrit une développable : les deux nouvelles coniques doubles de ces développables sont en nombre doublement infini et forment deux congruences distinctes ; les coniques de chaque congruence sont respectivement dans des plans passant par un point fixe, et rencontrent, chacune en six points, une courbe du septième ordre tracée sur la surface cubique.

Les deux courbes du septième ordre ainsi définies sont susceptibles d'une autre génération simple : il y a, sur la surface cubique, deux coniques tangentes à la droite δ; si l'on fait rouler un plan sur une de ces coniques et sur la surface, le lieu du point de contact avec celle-ci sera une des deux courbes d'ordre sept.

IV. — Surface desmique du quatrième ordre.

58. On dit que trois tétraèdres constituent un système desmique lorsque les trois surfaces du quatrième ordre, formées respectivement par leurs faces, appartiennent à un même faisceau ponctuel ; on appelle *surface desmique* toute surface de ce faisceau. Dans le Mémoire 44, j'exprime les coordonnées d'un point d'une telle surface à l'aide des fonctions elliptiques, et j'en déduis toute une théorie géométrique.

L'expression elliptique des coordonnées est

$$\rho x = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_1 v}, \qquad \rho y = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_2 v}, \qquad \rho z = \frac{\sigma_3 u}{\sigma_3 v}, \qquad \rho t = \frac{\sigma u}{\sigma v},$$

ρ désigne le facteur de proportionnalité, et les fonctions σ, de u et de v, correspondent aux *mêmes* racines e_α.

On peut tracer sur la surface trois séries de biquadratiques gauches, ayant pour équations respectives $v = \alpha$, $u - v = \alpha$, $u + v = \alpha$; α désignant une constante arbitraire ; toute tangente d'une de ces biquadratiques touche la surface desmique en un nouveau point, de sorte que la développable, qui a pour arête de rebroussement une des courbes précédentes, est circonscrite à la surface le long d'une courbe.

De là trois nouvelles séries de courbes, respectivement conjuguées des précédentes : $u = \alpha$, $3v + u = -\alpha$, $3v - u = \alpha$. On en déduit l'équation des lignes asymptotiques $u \pm v\sqrt{-3} = \text{const.}$

Les cordes des biquadratiques des trois séries appartiennent à un même complexe du troisième ordre; les arguments elliptiques des quatre points communs à la surface desmique et à une droite du complexe peuvent se mettre sous la forme

$$u_1 = \beta + \mu; \quad u_2 = \alpha + \mu; \quad u_3 = \alpha - \mu; \quad u_4 = \beta - \mu;$$
$$v_1 = \alpha; \quad v_2 = \beta; \quad v_3 = \beta; \quad v_4 = \alpha,$$

α, β, μ désignant des constantes arbitraires, et ces formules donnent de nombreuses conséquences géométriques.

59. Appelons *courbe linéaire* toute courbe tracée sur la surface desmique, et dont la tangente en un point forme, avec les tangentes aux trois biquadratiques qui passent par ce point, un faisceau de rapport anharmonique donné; l'équation générale de pareilles courbes est *linéaire* en u et v.

On peut, à l'aide des courbes linéaires, constituer sur la surface une *Géométrie identique à la Géométrie euclidienne du plan*, en ce qui concerne du moins les propriétés angulaires.

L'*angle desmique* de deux directions en un point de la surface se définit exactement comme sur la sphère, à l'aide du rapport anharmonique de ces directions et des deux directions asymptotiques au point considéré; on établit ces propositions :

La somme des trois angles d'un triangle desmique, c'est-à-dire formé par trois courbes linéaires, est égale à π; deux directions conjuguées sur la surface font entre elles un angle desmique droit; les courbes linéaires menées par les trois sommets d'un triangle desmique et respectivement conjuguées des côtés opposés sont concourantes; le lieu du sommet mobile d'un triangle desmique dont la base est fixe et dont les deux angles desmiques à la base sont égaux, est une courbe linéaire, conjuguée de la base,... etc.

Dans cette Géométrie, les lignes asymptotiques de la surface, qui

sont des courbes linéaires, correspondent aux droites isotropes du plan; voici une de leurs propriétés :

Par deux points fixes, situés sur une même asymptotique, on mène deux courbes linéaires conjuguées entre elles : le lieu de leur point de rencontre est une ligne asymptotique de l'autre série.

60. Après les courbes linéaires, j'ai étudié les sections planes de la surface desmique (44 et 45). Ce sont évidemment des *courbes desmiques*, c'est-à-dire que chacune d'elles appartient à un faisceau de quartiques qui contient trois systèmes de quatre droites; mais il est remarquable qu'une courbe desmique est desmique d'une infinité de manières, comme cela résulte de ce mode de génération :

Étant donnée une courbe de troisième classe, C, on lui mène, par un point m de son plan, trois tangentes, dont chacune rencontre C en quatre points. Les tangentes en ces 12 nouveaux points forment un système desmique et se coupent, par suite, 3 à 3, en 16 points μ : lorsque m décrit une droite, les 16 points μ correspondants décrivent une courbe desmique du quatrième ordre.

Mentionnons encore d'autres résultats :

Toute courbe desmique a 18 bitangentes remarquables, qui peuvent être groupées en 6 triangles jouissant de la propriété suivante : les trois bitangentes de chaque triangle sont les diagonales d'un quadrilatère complet, dont les 6 sommets sont leurs points de contact avec la courbe.

Les 18 côtés des 6 triangles touchent une courbe de troisième classe.

Il existe 183 coniques dont chacune touche un côté de chacun des 6 triangles.

L'équation d'une courbe desmique peut, d'après cela, être ramenée de six manières au type

$$X^4 + Y^4 + Z^4 - 2X^2Y^2 - 2X^2Z^2 - 2Y^2Z^2 + 4XYZ(\lambda X + \mu Y + \nu Z) = 0.$$

61. Les courbes desmiques à point double, sections de la surface desmique par ses plans tangents, ont une équation réductible à la forme

$$(X^3 + Y^3)(aX + bY + cZ) + XYZ^2 = 0;$$

on en conclut, entre autres propriétés, que :

Les tangentes asymptotiques, en un point a de la surface desmique, percent chacune la surface en un autre point : la droite qui joint les points ainsi obtenus touche la surface en un nouveau point, que j'appelle tangentiel *de a.*

Si u, v sont les paramètres de a, ceux du tangentiel sont $-3v$, u; si un point décrit une asymptotique, son tangentiel décrit une asymptotique de la même série.

62. La réciproque de la surface des centres de courbure d'une quadrique à centre est une surface desmique; on obtient par là (46) des propositions sur les *normales à une quadrique*. On sait que, par un point M de l'espace, on peut mener, à la surface des centres de courbure d'une quadrique, 28 tangentes doubles; parmi elles figurent 6 normales N à la quadrique, 6 droites P_1 situées sur des paraboloïdes normaux à la quadrique le long de six génératrices d'un même système, 6 droites analogues P_2 pour les génératrices de l'autre système. Ces 18 droites correspondent aux 18 bitangentes de la courbe desmique considérées plus haut, et possèdent des propriétés réciproques. Par exemple, elles sont sur un cône du troisième ordre, et *ce cône passe par* 12 *points fixes,* quel que soit le point M dans l'espace. Les points fixes sont ceux où les normales aux ombilics de la quadrique coupent les plans principaux et le plan de l'infini.

On sait que les 6 droites N sont sur un cône du second ordre; de même les 6 droites P_1 et les 6 droites P_2; *ces trois cônes ont quatre droites communes; et il existe* 180 *autres cônes du second ordre contenant* 6 *des droites* N, P_1, P_2.

Les droites N, P_1, P_2 forment un complexe du troisième ordre; je trouve que c'est le complexe des normales aux quadriques

$$(1)\qquad \frac{x^2}{(\sigma+b)(\sigma+c)}+\frac{y^2}{(\sigma+c)(\sigma+a)}+\frac{z^2}{(\sigma+a)(\sigma+b)}=1,$$

où σ est un paramètre variable. C'est aussi le complexe que forment les génératrices rectilignes de ces surfaces et des surfaces homofocales.

Les normales aux ombilics sont les mêmes pour toutes les qua-

driques (1); il en résulte, d'après un beau théorème de M. Maurice Lévy, que ces surfaces font partie d'un *système triple orthogonal*. C'est la famille la plus générale de quadriques à centre pour laquelle les ombilics décrivent des droites normales à toutes les quadriques. L'intégration d'une équation différentielle du premier ordre, par une méthode due à M. Darboux, m'a donné explicitement les deux autres familles du système triple, qui peuvent être algébriques dans un cas très étendu.

M. Darboux a bien voulu mentionner ce système dans son Ouvrage sur les Systèmes triples orthogonaux.

V. — Surfaces diverses.

63. M. Picard a introduit dans la Science la notion d'intégrale de différentielle totale de première espèce sur une surface algébrique, généralisant ainsi, à un nouveau point de vue, la théorie si féconde d'Abel et de Riemann pour les courbes algébriques. Les surfaces qui ne possèdent pas d'intégrales de cette nature sont comparables, sous plusieurs rapports, aux courbes unicursales : sur l'une d'elles, en effet, les *courbes d'un ordre donné* peuvent être individuellement découpées par des surfaces formant un système linéaire; de même que, sur une courbe unicursale, les *points* sont individuellement découpés par des courbes formant un faisceau. L'énoncé plus précis de ce théorème, établi dans le Mémoire 51, est le suivant :

Sur une surface n'ayant pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce, les courbes algébriques d'un même ordre se répartissent en une ou plusieurs séries linéaires.

Parmi les corollaires, citons celui-ci :

Si l'on peut tracer, sur une surface S, *une série simplement infinie de courbes unicursales, se coupant deux à deux en un point mobile au moins, et n'ayant pas de point singulier mobile en dehors des lignes multiples de* S, *la surface est représentable point par point sur le plan.*

Ainsi :

Les surfaces engendrées par des cubiques gauches, se coupant deux à

deux en un point mobile au moins, sont représentables point par point sur le plan.

Je détermine, dans ce cas particulier, toutes les surfaces considérées.

64. Le Mémoire 49 donne, au sujet des courbes planes, un théorème qui entraîne d'intéressantes conséquences dans la théorie des surfaces; voici l'énoncé de cette proposition, établie en même temps par M. Castelnuovo, sous une forme un peu moins complète.

On dit qu'une involution, formée de groupes de n points sur une courbe algébrique, est d'*ordre* n; elle est d'*espèce* k si chaque groupe est déterminé par k de ses points choisis arbitrairement; elle est *rationnelle* si ses groupes sont ceux que découpent, sur la proposée, les courbes d'un système linéaire. Cela posé :

Les involutions non rationnelles, en dehors naturellement de celles dont l'espèce égale l'ordre, sont toutes d'espèce un, et il n'en existe pas sur une courbe prise au hasard.

Si une courbe C, de genre p, admet une involution non rationnelle d'espèce un, elle est liée à une courbe $\mathfrak{C}$, de genre ϖ ($\varpi < p$), de telle sorte qu'à un point de C corresponde un point de $\mathfrak{C}$, et qu'à un point de $\mathfrak{C}$ correspondent n points de C : les groupes de n points ainsi définis sur C forment l'involution.

Si d est le nombre des points doubles de l'involution, on a

$$2(p-1) = 2n(\varpi-1) + d.$$

Je montre aussi qu'il ne peut exister, sur une courbe algébrique, une série continue d'involutions irrationnelles de même ordre.

65. Comme conséquence, j'établis (50) que :

Si l'on peut tracer sur une surface algébrique une série simplement infinie de courbes unicursales, de même ordre, se coupant deux à deux en un point mobile, la surface est représentable point par point sur le plan, même si les unicursales ont des points singuliers mobiles en dehors des lignes multiples de la surface.

En particulier :

Toute surface sur laquelle on peut tracer une série de coniques, de telle sorte qu'il passe par chaque point plus d'une conique de la série, est une surface du quatrième ordre de Steiner ou une dégénérescence de celle-ci.

VI. — Surfaces unicursales.

66. Autant la théorie des surfaces représentables point par point sur le plan est riche en propositions particulières et en exemples curieux, autant elle semble pauvre en résultats généraux. Il n'était donc pas sans intérêt d'arriver, dans ce domaine, à des théorèmes d'une application étendue. Mon but, dans le Travail 55, a été de rechercher, d'une manière générale, quelles sont les images sur le plan des courbes communes à une surface unicursale et à ses adjointes d'un ordre donné : les résultats antérieurement obtenus sur cette question étaient incomplets et souvent même inexacts. Les deux propositions suivantes résument mes recherches :

I. *Soit une surface S, d'ordre n, représentable point par point sur le plan, de telle sorte que ses sections planes aient pour images des courbes d'ordre h, ayant en des points* (a_1), (a_2), ... *des singularités* σ_1, σ_2, ... *Les images des courbes mobiles, communes à la surface et à ses adjointes d'ordre* $n+q-4$, *sont des courbes d'ordre* $hq-3$, *ayant aux points* (a_1), (a_2), ... *les singularités adjointes des singularités* $(q\sigma_1)$, $(q\sigma_2)$, ...

II. *Réciproquement, toute courbe du plan, d'ordre* $hq-3$, *ayant en* (a_1), (a_2), ... *les singularités adjointes des singularités* $(q\sigma_1)$, $(q\sigma_2)$, ... *est l'image de l'intersection de la surface S avec une surface adjointe d'ordre* $n+q-4$ [1].

67. D'autres résultats du Mémoire 55 concernent les points mul-

[1] Si une courbe possède en un point une singularité σ, la singularité adjointe à σ est celle que possèdent, au même point, les courbes adjointes à la proposée.

Si des courbes $f_1=0$, $f_2=0$, ... possèdent en un point la singularité σ, la singularité $(q\sigma)$ est celle que possèdent, au même point, les courbes

$$0=F(f_1, f_2, \ldots),$$

F étant un polynome arbitraire, homogène et d'ordre q, par rapport à $f_1, f_2, \ldots$.

tiples isolés de la surface, par lesquels doivent passer les surfaces adjointes; c'est-à-dire, en particulier, tous les points multiples d'ordre supérieur à deux, situés en dehors des lignes multiples : *de pareils points ont toujours, pour image plane, une courbe.* De plus :

Si une surface d'ordre n, représentable point par point sur le plan, possède t de ces points multiples isolés, elle admet au moins t surfaces d'ordre $n-4$, adjointes le long de ses lignes multiples, et linéairement distinctes.

VII. — Surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes.

68. Une surface peut correspondre point par couple, à une courbe algébrique C; c'est-à-dire qu'à un couple de points de C correspond un point de la surface, et inversement qu'à un point de la surface répond un seul couple sur C. Si C est de genre p, la surface est de genre $\frac{1}{2}p(p-1)$.

Lorsque $p=3$, on peut supposer que C est la courbe plane générale d'ordre quatre; alors, pour une des surfaces que l'on vient de définir, les coordonnées non homogènes d'un point sont des fonctions abéliennes à six périodes, de trois paramètres u, v, w, liés par la relation $\vartheta(u, v, w) = 0$, où ϑ désigne une des 64 fonctions abéliennes normales du premier ordre.

69. Voici comment on peut définir une pareille surface, du degré minimum *six* (56, 57, 58) :

Soient ϑ_1 et ϑ_2 deux quelconques des 64 fonctions d'ordre un; les 62 autres ϑ se groupent deux à deux de manière que le produit de deux fonctions d'un groupe ait même caractéristique que $\vartheta_1\vartheta_2$. On obtient ainsi, au total, 32 produits $\vartheta_i\vartheta_j$, dont 16 sont des fonctions paires, et les 16 autres impaires; les 16 produits pairs s'expriment — de même que les 16 impairs — en fonction linéaire et homogène de 4 d'entre eux.

Désignons alors par $\Theta_1, \ldots, \Theta_4$ celles des quatre fonctions ainsi définies qui n'ont pas la même parité que $\vartheta_1\vartheta_2$; soit S la surface pour laquelle les coordonnées $x_1, \ldots, x_4$ d'un point sont proportionnelles à $\Theta_1, \ldots, \Theta_4$, les paramètres u, v, w étant liés par $\vartheta_1(u, v, w) = 0$. J'établis que S est d'ordre six; si on la rattache à la courbe C du quatrième

ordre, à un couple de points sur C correspond un seul point de S, mais à un point de S répondent, sur C, *deux* couples, situés sur une même droite. La surface S est néanmoins de genre trois.

70. Aux demi-périodes et aux 63 fonctions $\mathfrak{S}$, autres que $\mathfrak{S}_1$, correspondent, sur S, des points et courbes remarquables.

12 demi-périodes annulent $\mathfrak{S}_1$ et les 4 Θ; il leur correspond 12 droites, concourant en un point O, qui est triple sur la surface, et répond aux arguments annulant $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$. Aux 16 autres demi-périodes annulant $\mathfrak{S}_1$, correspondent, sur S, 16 points doubles, formant une configuration de Kummer; aux 32 fonctions $\mathfrak{S}_i$ et $\mathfrak{S}_j$, telles que le produit $\mathfrak{S}_i\mathfrak{S}_j$ ait la caractéristique, mais non la parité, de $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$, correspondent 32 cubiques planes, placées deux par deux dans les 16 plans de la configuration de Kummer précédente, et passant par les six points doubles situés dans leur plan. Enfin aux 30 dernières fonctions $\mathfrak{S}$ correspondent 30 biquadratiques gauches, passant chacune par huit points doubles et par le point O.

71. Il est intéressant d'observer que la surface S se déduit géométriquement, d'une manière très simple, de la surface de Kummer.

Considérons le point O et la surface de Kummer qui admet pour points doubles les 16 points doubles de S. Toute sécante issue de O coupe la surface en 4 points, qui se répartissent, de trois manières différentes, en deux couples, et les deux couples de chaque groupement déterminent sur la sécante une involution du second ordre, dans laquelle le point O a un conjugué, m : *le lieu des points* m, quand la sécante varie, *est la surface* S.

Cette construction montre que S admet pour ligne double une cubique plane, intersection de la première polaire et du plan polaire du point O par rapport à la surface de Kummer, et aussi que S contient les 12 bitangentes menées de O à cette surface; ce sont les 12 droites trouvées plus haut.

72. On arrive ainsi à une représentation géométrique intéressante des 64 fonctions abéliennes normales du premier ordre; la figure obtenue conduit également à des propriétés nouvelles des courbes du quatrième ordre, ou de quatrième classe (59 et 56).

Soit, en effet, $\mathfrak{S}$ le cône de quatrième classe circonscrit à la surface de Kummer, K, à partir du point O; ses 28 génératrices doubles sont les 12 bitangentes menées de O à K et les 16 droites qui joignent O aux points doubles de K. Ces 28 droites, comme on sait, sont situées 12 par 12 sur 63 cônes du troisième ordre, qui sont les *cayleyens* des 63 systèmes de cônes du second ordre inscrits à $\mathfrak{S}$; or, ces 63 cônes, de sommet O, sont en évidence dans la figure : 32 d'entre eux ont pour base les 32 cubiques planes trouvées sur S; 30 autres ont pour directrices les 30 biquadratiques; le dernier, enfin, a pour base la cubique double de S. De là résultent des propriétés des courbes de quatrième classe, dont voici quelques exemples :

Les 28 points doubles d'une courbe plane, $\mathfrak{S}$, de quatrième classe sont, 12 par 12, sur 63 cubiques : *ces cubiques peuvent se répartir de 336 manières en groupes de trois, de telle sorte que les trois cubiques d'un groupe n'aient aucun point double de $\mathfrak{S}$ en commun, et se coupent en trois points situés sur une droite.*

Les 28 points doubles de $\mathfrak{S}$ sont, 6 par 6, sur 1008 coniques : *ces coniques se répartissent en 336 groupes de trois, de telle sorte que les trois coniques d'un groupe n'aient en commun aucun point double de $\mathfrak{S}$, et se coupent en quatre mêmes points.*

QUATRIÈME SECTION.

FONCTIONS ABÉLIENNES ET SURFACES HYPERELLIPTIQUES.

I. — Surfaces hyperelliptiques.

73. L'Académie des Sciences avait proposé, comme sujet pour le Prix Bordin en 1892, la question suivante :

Applications de la théorie générale des fonctions abéliennes à la Géométrie.

Le Mémoire (60) que j'ai envoyé au concours à obtenu le prix; on me permettra de citer *in extenso* le Rapport de M. *Poincaré* sur ce travail :

Si l'on exprime les coordonnées d'un point d'une courhe algébrique de genre 1 par des fonctions elliptiques, l'introduction de ces transcendantes met en évidence bien des propriétés de ces courbes qui auraient pu échapper au chercheur s'il n'avait possédé que les seules ressources de l'Algèbre. C'est là une source importante d'applications des fonctions doublement périodiques à la Géométrie. Il peut paraître naturel de généraliser cette méthode et d'étudier, par des procédés analogues, certaines catégories de surfaces. On avait cependant jusqu'ici peu travaillé dans cette voie; aussi, en y pénétrant, les analystes pouvaient-ils être assurés d'y rencontrer une ample moisson de découvertes.

C'est ce qui a décidé l'Académie à mettre la question au concours; son attente n'a pas été trompée; un seul Mémoire, il est vrai, a été déposé au Secrétariat, mais les résultats qui y sont démontrés sont d'une très grande importanee et conduisent à la solution de plusieurs problèmes intéressants. Les surfaces hyperelliptiques, c'est-à-dire les surfaces telles que les coordonnées d'un quelconque de leurs points peuvent s'exprimer par des fonctions quadruplement périodiques, sont de deux sortes. Il peut arriver, en effet, qu'à chaque point de la surface corresponde un seul point du champ hyperelliptique, ou bien plusieurs points de ce champ. Les surfaces de la première classe sont celles de M. Picard; mais on connaît depuis longtemps une surface de la deuxième classe à laquelle est attaché le nom de Kummer.

La plus grande partie du Mémoire est consacrée à la théorie de la surface de Kummer; bien que cette surface ait déjà fait l'objet des travaux d'un grand nombre de géomètres allemands, l'auteur a découvert beaucoup de propriétés nouvelles dont quelques-unes s'énoncent fort élégamment. Il s'attache surtout à l'étude des courbes tracées sur la surface. On sait quelles difficultés présente la classification des courbes gauches et, en particulier, de celles qui sont tracées sur une surface donnée. Cette question, abordée par notre regretté confrère Halphen, lui avait inspiré un Ouvrage justement admiré de tous les géomètres, et couronné autrefois par l'Académie de Berlin.

Le problème a été résolu eomplètement par Halphen pour quelques surfaces, pour celles du second degré, par exemple. Grâce à l'emploi des fonctions abéliennes, l'auteur du Mémoire fait pour la surface de Kummer ce qu'Halphen avait fait pour les quadriques. Il étudie en outre, avec de grands détails, les surfaces inscrites dans celle de Kummer, les relations de la surface de Kummer avec sa réciproque, les surfaces adjointes à celle de Kummer.

Quatre Chapitres sont consacrés à l'étude des surfaces de M. Picard et des courbes que l'on peut tracer sur elles. Le plus important est celui où se

trouve établie la liaison entre les fonctions hyperelliptiques et les surfaces adjointes à une surface hyperelliptique donnée.

Revenant enfin aux surfaces hyperelliptiques de la deuxième classe, l'auteur étudie celles qui sont telles qu'à chacun de leurs points correspondent deux couples d'arguments, et il montre que ces surfaces correspondent point par point à celle de Kummer.

En résumé, le Mémoire qui est soumis au jugement de l'Académie contient l'étude complète de plusieurs surfaces intéressantes et de leurs relations avec les fonctions abéliennes; c'est là une conquête très précieuse pour la Géométrie, et qui ne sera pas non plus inutile à l'Analyse pure, puisqu'elle nous aidera à nous représenter d'une manière plus concrète les propriétés de ces transcendantes. La Commission a donc été unanime à proposer de décerner le prix Bordin à l'auteur du Mémoire portant pour épigraphe :

Pendent opera interrupta.

L'auteur de ce Mémoire est M. Humbert.

74. M. Picard, dans un article de la *Revue générale des Sciences* (30 décembre 1894), où il passe en revue les progrès récents de la théorie des surfaces, a consacré quelques lignes à mon travail couronné, et voici comment il s'exprime à propos des surfaces hyperelliptiques :

Dans un Mémoire extrêmement intéressant, couronné il y a deux ans par l'Académie, M. Humbert a approfondi l'étude des surfaces précédentes et établi des théorèmes d'une rare élégance. Parmi les résultats relatifs aux surfaces adjointes, citons au moins celui qui concerne les adjointes d'ordre $m-3$: le nombre de ces adjointes linéairement distinctes est égal au genre des sections planes de la surface diminué d'une unité. Signalons encore que le genre numérique P est égal à -1, et est, par suite, distinct du genre géométrique. M. Humbert étudie aussi des surfaces remarquables d'ordre *huit*, ayant pour lignes doubles les arêtes d'un tétraèdre, qui sont jusqu'ici les surfaces de moindre degré correspondant à des fonctions hyperelliptiques non réductibles aux fonctions doublement périodiques. D'après ce que j'ai dit plus haut, il resterait à voir s'il existe de telles surfaces pour les degrés *six* et *sept;* il est bien vraisemblable que *huit* est le degré minimum.

M. Humbert s'est aussi occupé, dans son Mémoire, de la surface de Kummer, qui se rattache aux fonctions quadruplement périodiques, mais ne rentre pas dans la famille précédente : car à un point arbitraire de la surface correspondent *deux* valeurs des paramètres, aux périodes près; il fait une étude très complète des courbes tracées sur la surface et des propriétés des surfaces passant par ces courbes.

Ces extraits rendent inutile une analyse détaillée de mon Mémoire (60), aussi me bornerai-je à mentionner les points les plus importants.

75. *Surface de Kummer.* — J'adopte la représentation paramétrique de M. Weber, dans laquelle les coordonnées d'un point de la surface sont proportionnelles à quatre fonctions thêta du second ordre, paires, et à caractéristique nulle. J'établis un théorème fondamental :

L'équation de la courbe complète, d'ordre $4p$, commune à la surface et à une surface algébrique d'ordre p, s'obtient en annulant une fonction thêta normale paire, d'ordre $2p$, à caractéristique nulle, ET RÉCIPROQUEMENT.

Les courbes tracées sur la surface de Kummer sont toutes de degré pair, et le long d'une courbe quelconque (d'ordre $2p$), on peut circonscrire à la surface une surface (de degré p), ne la coupant pas en dehors de la courbe.

Cette dernière propriété est curieuse; je ne connais, pour la posséder aussi, que les cônes du second ordre (42).

Je donne, pour représenter les 16 points et les 16 plans singuliers, un algorithme nouveau, particulièrement simple, qui m'est utile dans toute la suite du Mémoire.

La classification des courbes d'un degré donné, $4m$ ou $4m+2$, tracées sur la surface, est résumée par ces théorèmes :

Les courbes d'ordre $4m$ se répartissent en 32 familles :

1° *Une famille, $2m^2+1$ fois infinie, dont chaque courbe est l'intersection complète de la surface et d'une surface générale d'ordre m;*

2° *Une famille, $2m^2-3$ fois infinie, de courbes passant par les 16 points doubles, et dont chacune est l'intersection de la surface avec une surface d'ordre $m+2$, passant par quatre des 16 coniques de la surface;*

3° *Trente familles, $2m^2-1$ fois infinie chacune, de courbes dont chacune passe par 8 points doubles et constitue l'intersection de la surface avec une surface d'ordre $m+1$, passant par deux coniques.*

Les courbes d'ordre $4m + 2$ se répartissent aussi en 32 *familles :*

1° *Seize familles, $2m^2 + 2m$ fois infinie chacune, de courbes dont chacune passe par* 6 *points doubles situés dans un même plan, et constitue l'intersection de la surface avec une surface d'ordre $m + 1$, passant par une des* 16 *coniques;*

2° *Seize familles, $2m^2 + 2m - 1$ fois infinie chacune, de courbes dont chacune passe par* 10 *points doubles, et constitue l'intersection de la surface avec une surface d'ordre $m + 2$, passant par trois coniques qui ont en commun un point singulier.*

J'étudie ensuite avec détails les courbes de degrés 4, 6 et 8 qu'on peut tracer sur la surface de Kummer; je citerai seulement un résultat :

La surface de Kummer admet 16 *familles, trois fois infinie chacune, de surfaces inscrites du troisième ordre, à quatre points doubles; les quatre points doubles, situés sur la surface de Kummer, sont les sommets d'un tétraèdre, dont les six arêtes touchent la surface en six nouveaux points.*

Cette propriété est intéressante, car, *a priori,* les tétraèdres inscrits par leurs sommets et circonscrits par leurs arêtes à une surface donnée, sont en nombre *doublement* infini; ici, nous trouvons un nombre *triplement* infini de tels tétraèdres.

76. *Surfaces hyperelliptiques générales.* — Ce sont celles pour lesquelles les coordonnées d'un point sont des fonctions abéliennes de deux paramètres u, v, telles qu'à un point ne réponde, aux périodes près, qu'un couple d'arguments. La liaison entre les fonctions thêta et les surfaces adjointes résulte de ce théorème :

Si les coordonnées d'un point d'une surface S, *de degré n, sont proportionnelles à quatre fonctions thêta, de caractéristique nulle, d'ordre h, ayant en des points u_1, v_1; u_2, v_2, ... des singularités communes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, les surfaces adjointes, d'ordre $n + q - 4$, découperont sur la proposée le système linéaire de courbes*

$$\lambda_1 \theta(u, v) + \lambda_2 \theta_2(u, v) + \ldots = 0,$$

les θ *étant des fonctions thêta de caractéristique nulle, d'ordre hq, ayant*

en (u_k, v_k) *la singularité adjointe de* $(q\sigma_k)$ (¹). *Réciproquement, toute courbe de cette nature est sur une adjointe d'ordre* $n+q-4$.

La surface unique d'ordre $n-4$, adjointe à S, coupe celle-ci, en dehors des courbes multiples, suivant des courbes unicursales, que j'appelle *unicursales singulières* (courbes *ausgezeichnete* de M. Nöther); je montre que :

Les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$, *qui passent par les courbes unicursales singulières, découpent sur la proposée le système linéaire de courbes*

$$\mu_1 \mathfrak{S}_1(u,v) + \mu_2 \mathfrak{S}_2(u,v) + \ldots = 0,$$

où les $\mathfrak{S}$ *sont des fonctions thêta de caractéristique nulle, d'ordre* hq, *ayant en* u_k, v_k *la singularité* $(q\sigma_k)$, *et réciproquement.*

Les deux propositions précédentes entraînent de nombreuses conséquences géométriques; la suivante est relative aux *surfaces de contact :*

Soit S *une surface hyperelliptique d'ordre* n. *Les surfaces d'ordre* $n+rm-4$, *adjointes à* S, *passant par les courbes unicursales singulières, et ayant avec la proposée, tout le long du reste de l'intersection, un contact d'ordre* $r-1$, *se divisent en* r^4 *systèmes. Dans chaque système, les courbes de contact forment une série linéaire.*

Les r *courbes de contact de* r *surfaces d'un même système sont sur une adjointe d'ordre* $n+rm-4$ *contenant les courbes unicursales singulières.*

Soit k *un entier positif inférieur ou égal à* r : *par* $k-1$ *courbes de contact appartenant à des systèmes quelconques et par les courbes unicursales singulières, on peut faire passer une infinité de surfaces adjointes, d'ordre* $n+km-4$, *qui découpent en outre sur la proposée un des* r^4 *systèmes de courbes de contact.*

Signalons encore ce théorème que, si les sections planes de S sont de genre p, le nombre des surfaces adjointes, d'ordre $n+q-4$, linéairement distinctes, où q est >0, est *toujours* égal à

$$\frac{1}{2}q(q-1)n + q(p-1) + \frac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3).$$

(¹) *Voir* au n° 66 pour l'explication de ces symboles de singularités.

77. Parmi les surfaces hyperelliptiques générales, j'ai signalé des surfaces du huitième ordre; la plus simple se déduit aisément de la surface de Kummer.

Supposons que les plans de coordonnées et le plan de l'infini forment, pour une surface de Kummer K, un *tétraèdre de Rosenhain*, c'est-à-dire que les faces et les sommets du tétraèdre soient respectivement des plans et des points singuliers de la surface. A un point X, Y, Z de K, faisons correspondre deux points x, y, z par les relations $X = \frac{1}{yz}$, $Y = \frac{1}{zx}$, $Z = \frac{1}{yx}$; le point x, y, z décrit une surface du huitième ordre, hyperelliptique, et telle qu'à un de ses points ne réponde qu'un couple d'arguments abéliens, aux périodes près.

Les lignes doubles de la nouvelle surface sont les arêtes du tétraèdre de référence; ses sections planes sont de genre *neuf*, etc.

78. *Surfaces analogues à celle de Kummer.* — Si à un point d'une surface hyperelliptique répondent deux couples d'arguments abéliens, je montre qu'elle est représentable point par point sur la surface de Kummer et j'indique la relation entre les fonctions thêta et les surfaces adjointes. Il y a, dans cette classe, des surfaces du quatrième ordre; je donne une méthode pour les obtenir toutes, et je discute, à titre d'exemple, le lieu des sommets des cônes du second ordre qui passent par six points fixes : c'est une surface dont la liaison avec les fonctions abéliennes était déjà connue; j'en fais connaître quelques propriétés nouvelles.

II. — Surfaces de Kummer elliptiques.

79. Parmi les surfaces de Kummer, la plus anciennement connue est la *surface de l'onde*, ou sa transformée homographique, le *tétraédroïde*; on sait, depuis longtemps, que les coordonnées d'un point d'une telle surface s'expriment à l'aide de fonctions, doublement périodiques séparément par rapport à deux paramètres. Dans le Mémoire 62, je détermine toutes les surfaces de Kummer qui jouissent de la même propriété, c'est-à-dire *toutes les surfaces de Kummer elliptiques*, et je les étudie au point de vue des courbes algébriques qu'on peut tracer sur elles.

Une surface de Kummer elliptique est déterminée, à une transformation homographique près, si l'on se donne les périodes des deux systèmes de fonctions elliptiques de la représentation et un nombre entier, *carré parfait*, que nous verrons apparaître tout à l'heure dans une théorie plus générale, et que j'appelle l'*invariant*. Le tétraédroïde correspond à l'invariant *quatre*; j'examine spécialement la surface d'invariant *neuf*, qui possède cette propriété caractéristique :

Sur une surface de Kummer elliptique, d'invariant neuf, *les six points doubles situés sur une quelconque des coniques de la surface se répartissent en deux groupes de trois, de telle sorte qu'il existe une conique inscrite au triangle formé par les trois premiers points et circonscrite au triangle formé par les trois derniers; — et réciproquement.*

M. O. Bolza a retrouvé la même propriété dans un Mémoire des *Math. Annalen*; il a bien voulu, par une Note publiée dans le t. LI du même Recueil, reconnaître ma priorité.

III. — Fonctions abéliennes singulières.

80. Soit $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h, g') un système de périodes normales pour des fonctions abéliennes de deux variables : au cours de mes recherches sur les surfaces hyperelliptiques, j'ai dû supposer que g, h, g' n'étaient liés par aucune relation *à coefficients entiers* du type

$$(1) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0;$$

dans l'hypothèse contraire, la surface pouvait admettre d'autres courbes algébriques que celles obtenues en annulant des fonctions thêta, formées avec les périodes précédentes.

En appelant *relation singulière* entre les périodes, toute relation de la forme (1) où les entiers A, B, ..., E sont supposés sans diviseur commun, j'ai étudié dans les Notes 63 à 71, et dans les deux Mémoires étendus 72 et 73, les fonctions abéliennes correspondantes, que j'appelle fonctions *singulières*.

81. Un premier résultat est que toute transformation, d'ordre *un*,

des périodes g, h, g', change une relation singulière en une autre, et que la quantité $B^2 - 4AC - 4DE$ est la même pour toutes deux. J'appelle cette quantité l'*invariant* de la relation singulière, et j'établis ensuite cette proposition fondamentale que :

Deux relations singulières de même invariant peuvent être ramenées l'une à l'autre par une transformation du premier ordre des périodes.

Il en résulte, pour les relations singulières d'invariant Δ, selon que Δ est du type $4N$ ou du type $4N + 1$, les deux formes canoniques

$$g - \frac{\Delta}{4} g' = 0, \qquad g - h - \frac{\Delta - 1}{4} g' = 0.$$

82. L'invariant est un nombre *essentiellement positif*; s'il est *carré parfait*, une intégrale abélienne de première espèce correspondant aux périodes considérées est réductible à une intégrale elliptique, et réciproquement. Dans ce cas, que j'appelle le *cas elliptique*, l'invariant étant n^2, la relation singulière peut se ramener à $nh - 1 = 0$, et le tableau des périodes au suivant :

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & \frac{1}{n}, \\ 0, & 1, & \frac{1}{n}, & g'. \end{matrix}$$

C'est là une nouvelle démonstration d'un théorème célèbre, énoncé par M. Weierstrass, établi et complété par M. Picard.

J'étends ensuite un théorème de M. Poincaré, qui, dans ma terminologie, s'énonce ainsi : S'il existe, entre les périodes, deux relations singulières, pour *chacune* desquelles l'invariant soit carré parfait, il existe une infinité de telles relations. Je démontre qu'il suffit, pour la même conclusion, que l'*une* des deux premières relations singulières ait son invariant carré parfait.

IV. — Fonctions intermédiaires singulières.

83. En désignant toujours par $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h, g') un système de périodes abéliennes normales pour deux variables u et v,

j'appelle, à l'exemple de Briot et Bouquet et de M. Poincaré, *fonction intermédiaire* toute fonction entière de u, v qui se reproduit, multipliée par une exponentielle $e^{\lambda u+\mu v+\nu}$, quand l'on augmente u et v d'une période.

Si les périodes ne vérifient pas de relation singulière, il n'y a pas d'autres fonctions intermédiaires (à un facteur exponentiel près), que les fonctions thêta dérivées des périodes $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h, g'); si, au contraire, les périodes sont liées par une relation singulière, que l'on peut toujours supposer ramenée au type $\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0$, il existe des fonctions intermédiaires satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} \varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v), \\ \varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v) e^{2\pi i[-lu+k\gamma v]+\text{const.}}, \\ \varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v) e^{2\pi i[-k\alpha u-(l+k\beta)v]+\text{const.}}, \end{aligned}$$

où l et k sont deux entiers, que j'appelle les *indices* de la *fonction intermédiaire singulière* $\varphi(u, v)$ (¹).

Toutefois, pour que ces fonctions existent, il faut et il suffit, en supposant la partie imaginaire de g positive, que

$$2l + \beta k > \operatorname{mod} k\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}.$$

Le produit d'une fonction d'indices l, k par une fonction d'indices $l', -k$ est une *fonction thêta*, d'ordre $l + l'$. On voit ainsi que, dans le cas des fonctions abéliennes singulières, une fonction thêta peut se décomposer en un produit de deux facteurs qui ne sont pas, à un facteur exponentiel près, des fonctions thêta aux mêmes périodes.

Deux fonctions intermédiaires singulières, d'indices l, k et l', k', ont un nombre de zéros communs, abstraction faite des multiples des périodes, égal à $2ll' + \beta(lk' + kl') + 2\alpha\gamma kk'$.

84. Les fonctions intermédiaires d'indices l, k sont fonctions linéaires et homogènes de $l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$ d'entre elles, dont j'obtiens aisément les développements en série d'exponentielles.

(¹) On a des équations analogues, bien qu'un peu plus compliquées, si la relation singulière est du type général.

85. J'appelle *fonctions intermédiaires normales* d'indices l, k, celles qui vérifient les relations

$$\begin{aligned}
F(u+1, v) &= e^{\omega\pi i} F(u, v),\\
F(u, v+1) &= e^{\omega'\pi i} F(u, v),\\
F(u+g, v+h) &= e^{\theta\pi i} e^{2\pi i[-lu+k\gamma v]+\pi i[-lg+k\gamma h]} F(u, v),\\
F(u+h, v+g') &= e^{\theta'\pi i} e^{2\pi i[-k\alpha u-(l+k\beta)v]-\pi i[k\alpha h+(l+k\beta)g']} F(u, v),
\end{aligned}$$

et je dis que les entiers ω, θ, ω', θ' forment la *caractéristique* de la fonction, exactement comme dans la théorie des fonctions thêta normales.

Cela posé, en supposant $\gamma = 1$, ainsi qu'on en a le droit, c'est-à-dire en partant de la relation singulière $\alpha g + \beta h + g' = 0$, j'établis les théorèmes suivants :

1° *Soit posé* $\delta = l^2 + \beta kl + \alpha k^2$. *Les* δ *fonctions normales, linéairement distinctes, de caractéristique* $(0, 0, 0, 0)$, *d'indices* l, k, *se répartissent en :*

$\frac{1}{2}(\delta+1)$ *fonctions paires, s'annulant pour six demi-périodes* *et* $\frac{1}{2}(\delta-1)$ *fonctions impaires, s'annulant pour dix demi-périodes*	*si* δ *est impair.*
$\frac{1}{2}(\delta+2)$ *fonctions paires, s'annulant pour quatre demi-périodes* *et* $\frac{1}{2}(\delta-2)$ *fonctions impaires, s'annulant pour douze demi-périodes*	*si* δ *est pair et* k *impair.*
$\frac{1}{2}(\delta+4)$ *fonctions paires* *et* $\frac{1}{2}(\delta-4)$ *fonctions impaires, s'annulant pour seize demi-périodes*	*si* δ *et* k *sont pairs,*

2° *Les* δ *fonctions normales, linéairement distinctes, de caractéristique* $(\omega, \theta, \omega', \theta')$, *d'indices* l, k, *se répartissent en :*

$\frac{1}{2}(\delta+1)$ *fonctions paires ou impaires, s'annulant pour six demi-périodes* *et* $\frac{1}{2}(\delta-1)$ *fonctions impaires ou paires, s'annulant pour dix demi-périodes*	*si* δ *est impair.*
$\frac{1}{2}\delta$ *fonctions paires, s'annulant pour huit demi-périodes* *et* $\frac{1}{2}\delta$ *fonctions impaires, s'annulant pour huit demi-périodes*	*si* δ *est pair.*

Toutefois, si δ est pair et k impair, pour les trois caractéristiques autres que (0, 0, 0, 0) *vérifiant les congruences*

$$\omega + l\omega' \equiv \theta' + \theta(l + \beta) \equiv 0 \pmod 2,$$

il y a

$\frac{1}{2}(\delta + 2)$ *fonctions paires ou impaires, s'annulant pour quatre demi-périodes,*

et

$\frac{1}{2}(\delta - 2)$ *fonctions impaires ou paires, s'annulant pour douze demi-périodes.*

86. On obtient ainsi des groupes intéressants de demi-périodes, annulant les fonctions intermédiaires normales paires ou impaires d'indices l, k; si k est pair, ces groupes coïncident avec ceux qui annulent les fonctions thêta normales d'ordre l, ayant même caractéristique que les fonctions considérées; si k est impair, on obtient de nouveaux groupes, que je caractérise, et dont je donne explicitement le Tableau, dans tous les cas.

87. En annulant une fonction intermédiaire, singulière, normale, paire ou impaire, on obtient sur la surface de Kummer, représentée par le procédé de M. Weber, une courbe algébrique singulière, qui n'existe pas sur la surface de Kummer générale, et qui passe par certains groupes de points doubles de la surface.

J'établis deux formules importantes relatives au *degré*, d, et au *genre*, p, d'une courbe singulière :

$$d = 2l + \beta k,$$
$$p = \tfrac{1}{2}(l^2 + \beta kl + \alpha k^2 - s + 2) - \mathrm{N},$$

en désignant par l, k les indices de la fonction normale correspondante, par $2s$ le nombre de points doubles par lesquels la courbe passe simplement, et par $-\mathrm{N}$ un terme soustractif, que j'explicite, et qui dépend des points multiples de la courbe proposée. Quand il n'y a pas de points multiples, $\mathrm{N} = 0$.

88. Inversement, si une surface de Kummer admet une courbe algébrique n'existant pas sur la surface générale, c'est une surface *singulière*, c'est-à-dire dérivant de fonctions abéliennes singulières : je le

démontre en m'appuyant sur un beau théorème de M. Appell, relatif aux fonctions intermédiaires en général.

Les théorèmes des nos 85 et 87 contiennent évidemment la classification des courbes singulières d'un degré donné, qu'on peut tracer sur une surface de Kummer singulière.

V. — Équations modulaires.

89. La question se pose naturellement de déterminer les radicaux qui donnent naissance à des fonctions abéliennes singulières; ou, sous une autre forme, de trouver les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les constantes a_1, a_2, ..., a_6, pour que les périodes des fonctions abéliennes dérivées du radical $\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_6)}$ soient liées par une relation singulière, *d'invariant donné.*

L'équation entre a_1, ..., a_6 est ce que je nomme *l'équation modulaire* corrrespondant à l'invariant considéré; *elle est algébrique.*

J'indique pour la former de proche en proche, à partir des invariants cinq et huit, une *méthode géométrique* qui repose sur les principes suivants :

90. Soit d'abord le cas de l'invariant cinq. On peut supposer $\beta = 1$, $\alpha = -1$; pour les indices $l = 1$, $k = 1$, on trouve, sur la surface de Kummer correspondante, une cubique gauche, passant par six points doubles d_1, d_2, ..., d_6. Désignons par P_1, P_2, ..., P_6 les traces, sur un plan Π quelconque, des six plans singuliers de la surface qui passent par d_1 : en projetant la cubique sur Π, à partir de d_1, on obtient une conique, tangente à la droite P_6 et circonscrite au pentagone $P_1P_2P_3P_4P_5$. Si l'on transforme ce résultat par polaires réciproques, en observant que la surface de Kummer est sa propre correspondante dans dix corrélations, on établit que la condition *nécessaire et suffisante* pour que la surface de Kummer soit singulière et d'invariant cinq est celle-ci :

Les six points doubles, situés sur une même conique, d'une surface de Kummer répondant à des fonctions singulières d'invariant cinq, sont tels

qu'il existe une conique passant par l'un d'eux et inscrite à un pentagone formé par les cinq autres.

Soient alors ∞, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 les arguments des six points sur leur conique; la condition précédente se traduit analytiquement par la relation

$$\begin{aligned} &\sqrt{(a_1-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)(a_4-a_5)} \\ &+\sqrt{(a_1-a_2)(a_3-a_5)(a_1-a_5)(a_3-a_4)} \\ &+\sqrt{(a_1-a_4)(a_3-a_2)(a_1-a_5)(a_3-a_4)}=0, \end{aligned}$$

qui est l'équation modulaire, répondant à l'invariant cinq, pour le radical $\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)}$.

91. De même, dans le cas de l'invariant huit, en supposant $\beta = 0$, $\alpha = -2$, on trouve, sur la surface de Kummer, pour les indices $l = 2$, $k = 1$, une série, simplement infinie, de biquadratiques gauches passant par quatre points doubles. Une de ces biquadratiques a un point double en un cinquième point singulier de la surface, et en la projetant à partir de ce dernier, on arrive à ce résultat :

Les six points doubles, situés sur une même conique, d'une surface de Kummer répondant à des fonctions singulières d'invariant huit, sont tels qu'il existe une conique passant par deux d'entre eux et inscrite à un quadrilatère formé par les quatre autres.

Analytiquement, on en conclut que le radical

$$\sqrt{x(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}$$

donne naissance à des fonctions abéliennes singulières d'invariant huit si l'on a

$$\begin{aligned} &4a_1a_2a_3a_4[(a_1+a_3)(a_2+a_4)-2a_1a_3-2a_2a_4]^2 \\ &=(a_2-a_4)^2(a_1-a_3)^2(a_1a_3+a_2a_4)^2. \end{aligned}$$

Ces deux résultats sont à rapprocher de celui donné au n° 79 pour l'invariant neuf.

92. Des théorèmes analogues permettent de former l'équation modulaire dans tous les cas; pour simplifier, je citerai seulement celui qui s'applique à un invariant de la forme 8N.

Soit λ le plus petit entier dont le carré atteigne ou dépasse N; posons $p = \lambda^2 - N$.

Pour la surface de Kummer répondant à des fonctions singulières d'invariant 8N, *et à certains invariants inférieurs, les six droites suivant lesquelles les six plans singuliers passant par un même point double coupent un plan* P, *quelconque, jouissent de cette propriété : il existe, dans le plan* P, *un système p fois infini de courbes, de genre p et de degré* 2λ, *dont chacune passe par les sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites et touche, partout ailleurs, ces six droites.*

En traduisant analytiquement cette propriété, on obtient une relation entre les arguments des six droites, considérées comme tangentes à une même conique, c'est-à-dire *l'équation modulaire pour l'invariant* 8N, avec certains facteurs étrangers connus d'avance, qui sont les équations modulaires pour des invariants plus petits.

Un théorème analogue remplace les courbes de genre p par une *seule courbe unicursale,* ayant des points multiples d'ordre donnés en certains des points de rencontre des six droites deux à deux, ce qui permet de traduire analytiquement la propriété modulaire d'une manière bien plus aisée.

93. Par exemple, *pour l'invariant douze,* on exprimera que les six droites peuvent se répartir en trois couples A et A′, B et B′, C et C′, de telle sorte qu'il existe une cubique, passant par les sommets des trois couples, ayant un point double au point d'intersection de A et de B, et touchant les droites A′, B′, C et C′; on obtiendra ainsi, avec l'équation modulaire de l'invariant douze, celle, déjà connue, de l'invariant huit. Le résultat est le suivant :

Le radical $\sqrt{x(x-1)(x-k^2)(x-l^2)(x-m^2)}$ conduit à des fonctions singulières d'invariant douze si l'on a

$$\sqrt{k^2-l^2}\sqrt{k'^2-l'^2}\,[(l'k-lk')(m^2-ll'kk')-4mll'kk'] = m(kk'-ll')(l'k+lk')^2,$$

en posant

$$k'=m\frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{m^2-k^2}}, \qquad l'=m\frac{\sqrt{1-l^2}}{\sqrt{m^2-l^2}}.$$

VI. — Transformations singulières.

94. Étant donné un système de périodes (1, 0), (0, 1), (g, h), (h, g'), que j'appellerai plus simplement (g, h, g'), le problème de la transformation, tel que l'a posé M. Hermite, consiste à trouver tous les systèmes (G, H, G'), tels qu'une fonction abélienne quelconque, $F(U, V)$, formée avec ces nouvelles périodes s'exprime rationnellement à l'aide des fonctions abéliennes, $f(u, v)$, admettant les périodes primitives.

D'abord U et V doivent être linéaires en u, v :

$$U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v; \tag{1}$$

il faut et il suffit ensuite que, si l'on augmente u et v d'une de leurs périodes, U et V augmentent d'une des leurs (¹), ce qui donne, en désignant par a_i, b_i, c_i, d_i des entiers :

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= a_0 + a_3 G + a_2 H, & \mu &= b_0 + b_3 G + b_2 H, \\ \lambda' &= a_1 + a_3 H + a_2 G', & \mu' &= b_1 + b_3 H + b_2 G', \\ \lambda g + \mu h &= d_0 + d_3 G + d_2 H, & \lambda h + \mu g' &= c_0 + c_3 G + c_2 H, \\ \lambda' g + \mu' h &= d_1 + d_3 H + d_2 G', & \lambda' h + \mu' g' &= c_1 + c_3 H + c_2 G'. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Éliminons $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$, G, H, G'; il vient, en posant $(ab)_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$,

$$g[(ac)_{03} + (ac)_{12}] + h[(bc)_{03} + (bc)_{12} - (ad)_{03} - (ad)_{12}] + g'[(db)_{03} + (db)_{12}] + (h^2 - gg')[(ab)_{03} + (ab)_{12}] + (cd)_{03} + (cd)_{12} = 0.$$

Si g, h, g' sont pris au hasard, les coefficients de g, h, g', $h^2 - gg'$ et le terme constant dans cette équation doivent être nuls : c'est l'hypothèse qu'a faite implicitement M. Hermite, et dont il a déduit la théorie ordinaire de la transformation. Mais si g, h, g' sont liés par une relation *singulière*, il existera d'autres transformations que celles de M. Hermite : je les appelle *singulières*, par opposition aux transformations de M. Hermite, que je nomme *ordinaires*.

(¹) Car à un système de valeurs de u, v doit correspondre un seul système de valeurs de U, V, aux périodes près.

95. La relation singulière étant, pour simplifier, ramenée au type

$$g+\beta h+\gamma g'=0,$$

les valeurs de G, H, G' et celles de λ, μ, λ', μ' sont données par les équations (2), où les a, b, c, d sont des entiers, liés uniquement par les relations

$$\begin{aligned}(ab)_{03}+(ab)_{12}&=0,\\ (cd)_{03}+(cd)_{12}&=0,\\ (ac)_{03}+(ac)_{12}&=k,\\ (db)_{03}+(db)_{12}&=\gamma k,\\ (bc)_{03}+(bc)_{12}-(ad)_{03}-(ad)_{12}&=\beta k,\end{aligned}$$

k désignant un entier arbitraire.

96. En posant $l=(ad)_{03}+(ad)_{12}$, je dis que les entiers l et k sont les *indices* de la transformation considérée; des définitions analogues s'appliquent au cas où la relation singulière entre les périodes est supposée de la forme la plus générale.

J'appelle *degré* de la transformation le nombre des systèmes de valeurs de (u, v) qui correspondent, par (1), à un système de valeurs de U, V, le tout aux périodes près; je démontre que le degré est la valeur absolue du déterminant $(a_0 b_1 c_2 d_3)$, ou encore de la quantité δ

$$\delta=l^2+\beta kl+\gamma k^2.$$

Si l'on désigne par g_1, h_1, ..., G_1, ..., les parties imaginaires de g, h, ..., G, ..., on trouve que le quotient $(H_1^2-G_1G_1'):(h_1^2-g_1g_1')$ a le signe de δ : si donc on veut que les systèmes de périodes considérés soient normaux, c'est-à-dire que $H_1^2-G_1G_1'$ et $h_1^2-g_1g_1'$ soient négatifs, il faut que δ soit positif.

97. Une transformation d'indices l et k change une fonction thêta, d'ordre m, des variables U, V, aux périodes (G, H, G'), en une fonction intermédiaire singulière de u, v, d'indice ml et mk, aux périodes (g, h, g').

D'ailleurs G, H et G' sont liés comme g, h, g', par une relation singulière; la transformation ci-dessus change une fonction intermédiaire singulière de U, V, d'indices donnés, en une fonction intermédiaire

singulière de u, v, dont je calcule les indices en fonction des précédents et de ceux de la transformation.

98. *Réduction d'une transformation.* — En faisant précéder une transformation singulière, d'indices l et k, d'une transformation ordinaire d'ordre un, on ne change pas les indices, et l'on peut ainsi donner à la transformation initiale une forme réduite : deux transformations réduites différentes ne sont pas réductibles l'une à l'autre par une transformation ordinaire du premier ordre.

Voici comment on obtient toutes les transformations réduites d'indices donnés, l et k, en désignant toujours par δ la quantité positive $l^2+\beta kl+\gamma k^2$. Soient : θ un diviseur commun positif de l et de k; c_2 un diviseur commun positif de $\frac{k}{\theta}$ et $\frac{l}{\theta}$; ρ un diviseur positif de $\frac{\delta}{c_2\theta^2}$, tel que les nombres ρ, $\frac{k}{c_2\theta}$, $\frac{l}{c_2\theta}$ soient premiers entre eux.

On pourra toujours trouver un ou plusieurs entiers, d_2, en nombre limité, de module inférieur à $\theta\rho$, tels que l'on ait

$$\frac{l}{\theta}-\frac{k}{c_2\theta}d_2\equiv 0, \qquad \gamma\frac{k}{\theta}+\frac{l+\beta k}{c_2\theta}d_2\equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} \rho).$$

La transformation réduite est alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{U} &= \frac{u}{\rho}\left[\frac{l}{\theta}-\frac{k}{c_2\theta}d_2\right]-\frac{v}{\rho}\left[\gamma\frac{k}{\theta}+\frac{l+\beta k}{c_2\theta}d_2\right], \\ \mathrm{V} &= u\frac{k}{c_2} \qquad\qquad\qquad +v\frac{l+\beta k}{c_2}. \end{aligned}$$

Les périodes G, H, G′ des fonctions abéliennes en U et V sont liées à g, h, g' par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{G}' &= -\frac{c_1}{c_2}+\frac{1}{c_2^2}[kh+(l+\beta k)g'], \\ \mathrm{H} &= -\frac{c_0}{c_2}-\frac{1}{c_2\rho\theta}\left[\left(-l+\frac{k}{c_2}d_2\right)h+\left(\gamma k+\frac{l+\beta k}{c_2}d_2\right)g'\right], \\ \mathrm{G} &= \frac{c_0d_2-c_2d_0}{c_2\rho\theta}+\frac{g}{c_2\rho^2\theta^2}[lc_2-kd_2] \\ &\quad +\frac{h}{c_2\rho^2\theta^2}\left[-\gamma kc_2-(2l+\beta k)d_2+\frac{k}{c_2}d_2^2\right]+\frac{g'}{c_2\rho^2\theta^2}\left[\gamma kd_2+\frac{l+\beta k}{c_2}d_2^2\right]. \end{aligned}$$

Dans ces formules, c_0, c_1, d_0 sont des entiers non négatifs quelconques, vérifiant les inégalités $c_0, c_1 < c_2, d_0 < \rho\theta$; de plus la quantité $\frac{\rho\theta c_0 + d_0 c_1}{c_2}$ doit être entière, et, en valeur absolue, inférieure à $\rho\theta$.

Comme conséquence, on détermine *toutes les transformations singulières du premier degré*. Elles sont comprises, à une transformation ordinaire près d'ordre un, dans les formules

$$\mathrm{U} = lu - \gamma kv,$$
$$\mathrm{V} = ku + (l + \beta k)v,$$

les périodes G, H, G′, de U, V étant liées à celles, g, h, g', de u, v par

$$\mathrm{G} = lg - \gamma kh, \qquad \mathrm{H} = lh - \gamma kg' = kg + (l + \beta k)h, \qquad \mathrm{G}' = kh + (l + \beta k)g'.$$

De plus, pour que la transformation soit du premier degré, il faut et il suffit que ses indices, l et k, vérifient la relation de Pell

$$l^2 + \beta kl + \gamma k^2 = 1.$$

J'en déduis que toutes les transformations singulières du premier degré sont des puissances de l'une d'entre elles, T_0.

99. Une transformation du premier degré fait correspondre point par point deux champs hyperelliptiques, ou si l'on veut deux surfaces hyperelliptiques, s et S, liées respectivement aux périodes (g, h, g') et $(\mathrm{G}, \mathrm{H}, \mathrm{G}')$: *les deux champs, ou les deux surfaces, ont-ils les mêmes modules?*

On doit répondre négativement à cette intéressante question.

Les surfaces s et S qui se correspondent par une transformation de la forme T_0^{2q} ont mêmes modules; de même celles qui se déduisent de s par les transformations T_0^{2q+1} ont *entre elles* mêmes modules; mais la transformation T_0 ne change s en une surface de mêmes modules que si la forme $l^2 + \beta kl + \gamma k^2$ peut représenter le nombre -1. Dans le cas contraire, on obtient ainsi des couples de surfaces se correspondant point par point et n'ayant pas les mêmes modules : le théorème classique de Riemann sur les courbes algébriques ne s'étend donc pas aux surfaces.

100. L'invariant le plus petit, non carré parfait, qui donne naissance à ce cas remarquable est *douze;* j'indique dans ce cas une image géométrique des deux systèmes de modules qui répondent aux deux surfaces :

Soit un hexagone circonscrit à une conique et tel qu'il existe une courbe unicursale du quatrième ordre passant par les sommets, et tangente aux côtés de l'hexagone : les rapports anharmoniques, trois à trois, des six côtés, considérés comme tangents à la conique, forment le premier système de modules; les rapports anharmoniques, trois à trois, des six sommets, considérés comme situés sur l'unicursale, forment le second système.

VII. — Multiplication complexe.

101. Si une transformation, singulière ou non, fait correspondre deux systèmes de fonctions abéliennes *aux mêmes périodes,* je dis, par analogie avec le cas elliptique, que c'est une *multiplication complexe.*

Le problème de déterminer tous les systèmes de périodes de multiplication complexe n'a jamais été traité avec la généralité qu'il comporte, parce que les auteurs qui s'en sont occupés ont toujours admis que la transformation de correspondance est une transformation de M. Hermite, c'est-à-dire une transformation ordinaire. Le cas des transformations singulières, qui donne précisément naissance aux multiplications complexes les plus remarquables, n'avait jamais été abordé.

102. Les périodes (g, h, g') de multiplication complexe doivent vérifier quatre relations (A), (B), (C), (D), de la forme :

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{A})\quad g^2a_3+gh(a_2+b_3)+h^2b_2+g(a_0-d_3)+h(b_0-d_2)-d_0=0,\\
&(\mathrm{B})\quad gha_3+gg'a_2+h^2b_3+hg'b_2+ga_1+h(b_1-d_3)-g'd_2-d_1=0,\\
&(\mathrm{C})\quad gha_3+gg'b_3+h^2a_2+hg'b_2-gc_3+h(a_0-c_2)+g'b_0-c_0=0,\\
&(\mathrm{D})\quad h^2a_3+hg'(a_2+b_3)+g'^2b_2+h(a_1-c_3)+g'(b_1-c_0)-c_1=0,
\end{aligned}$$

où les a_i, b_i, c_i, d_i sont des entiers, d'ailleurs quelconques.

Ces équations ne sont des identités que dans le cas de la multiplication ordinaire. Je démontre que :

1° Les périodes g, h, g' de multiplication complexe sont *toujours* liées par une relation singulière, au moins;

2° Si les équations (A), (B), (C), (D) se réduisent à une seule, c'est-à-dire si g, h, g' sont doublement indéterminés, la relation entre g, h, g' est singulière;

3° Si g, h, g' sont simplement indéterminés, les relations entre g, h, g' sont deux relations singulières, en excluant un cas elliptique de multiplication complexe elliptique;

4° Si g, h, g' sont complètement déterminés par les équations (A), (B), (C), (D), il existe entre ces périodes une ou trois relations singulières.

103. Les multiplications complexes correspondant à chaque cas sont les suivantes :

104. Dans le cas où g, h, g' sont liées uniquement par une relation singulière, supposée du type $\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0$, les multiplications complexes sont données par les formules

$$U = \rho u - \gamma\sigma v; \qquad V = \alpha\sigma u + (\rho + \beta\sigma) v,$$

ρ et σ étant deux entiers quelconques. A un système (u, v) correspond, naturellement, un seul système (U, V); à un système (U, V) correspondent $(\rho^2 + \beta\rho\sigma + \alpha\gamma\sigma^2)^2$ systèmes (u, v).

Les multiplications complexes de degré un, c'est-à-dire les *transformations birationnelles* en elles-mêmes de la surface hyperelliptique qui répond aux périodes (g, h, g'), sont données par les formules précédentes, les entiers ρ et σ vérifiant la relation

$$\rho^2 + \beta\rho\sigma + \alpha\gamma\sigma^2 = \pm 1.$$

Ce sont, dans tous les cas, des puissances d'une seule d'entre elles, combinée avec les transformations évidentes

$$U = \pm u + \text{const.}; \qquad V = \pm v + \text{const.}$$

105. Dans le cas de deux relations singulières liant g, h, g', on

peut ramener ces relations aux formes

$$h^2 - gg' = d; \qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' = \omega,$$

avec les conditions

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0; \qquad d > 0; \qquad \omega^2 - d(\beta^2 - 4\alpha\gamma) < 0;$$

les multiplications complexes sont données par

$$\begin{aligned} U &= [\ \rho + \alpha\sigma g + (\beta\sigma - \tau)h]u + [\ \gamma\theta + \tau g + \gamma\sigma h]v, \\ V &= [-\alpha\theta + \alpha\sigma h + (\beta\sigma - \tau)g']u + [\rho - \beta\theta + \tau h + \gamma\sigma g']v, \end{aligned}$$

ρ, σ, θ, τ étant des entiers quelconques. Le nombre des systèmes (u, v) répondant à un système (U, V) est

$$[\rho^2 - \beta\rho\theta + \alpha\gamma\theta^2 + \omega(\rho\sigma - \beta\theta\sigma + \tau\theta) - d(\tau^2 - \beta\sigma\tau + \alpha\gamma\sigma^2)]^2,$$

et les multiplications de degré un s'en déduisent immédiatement.

106. Dans le dernier cas enfin, g, h, g' sont liés par trois relations, dont trois ou une sont singulières. S'il y a trois relations singulières, les formules de multiplication complexe sont analogues aux précédentes, bien qu'un peu plus compliquées.

S'il y a une seule relation singulière, en excluant encore des cas elliptiques de multiplication elliptique complexe, deux hypothèses sont à faire, selon que l'invariant correspondant à la relation singulière est pair ou impair.

L'invariant étant pair, la relation singulière peut être supposée du type

$$g = cg' \qquad (c > 0),$$

et l'on a, pour déterminer h et g', deux relations de la forme

$$\begin{aligned} mh^2 + 2nhg' + cmg'^2 + qg' + rh + s &= 0, \\ nh^2 + 2cmhg' + cng'^2 + crg' + qh + s' &= 0, \end{aligned}$$

où m, n, q, r, s, s' sont des entiers. Ces deux équations, si l'on y regarde h et g' comme des coordonnées courantes, représentent deux coniques concentriques; pour qu'elles donnent pour h et g', et ensuite pour g, des valeurs formant un système normal de périodes, il faut et il suffit que les deux coniques se coupent en quatre points imaginaires et que les cordes communes qui passent par le centre commun soient réelles.

Les multiplications complexes correspondantes s'obtiennent sous une forme assez simple.

L'invariant étant impair, la relation singulière peut être ramenée au type

$$g = h + cg' \qquad (c > 0);$$

h et g' vérifient alors deux relations de la forme

$$mh^2 + 2nhg' + (cm - n)g'^2 + qg' + rh + s = 0,$$
$$(n + m)h^2 + 2cmhg' + cng'^2 + crg' + (q + r)h + s' = 0,$$

qui représentent encore deux coniques concentriques, assujetties aux mêmes conditions que les précédentes. Les multiplications complexes correspondantes sont explicitement données.

107. Dans ces deux derniers cas, il n'y a de multiplications complexes du premier degré que celles qui se déduisent de l'existence de la relation singulière entre g, h, g', et qui rentrent dès lors dans les formules du n° 104; une seule exception a lieu pour les fonctions abéliennes dérivées du radical $\sqrt{x^5 + 1}$, fonctions qui se rattachent au deuxième cas, et dont les périodes sont liées par $g = h + g'$. Je montre alors que les transformations birationnelles de la surface hyperelliptique correspondante en elle-même s'obtiennent en combinant, avec les substitutions $U = \pm u + \text{const.}$, $V = \pm v + \text{const.}$, les puissances des deux transformations

$$\begin{cases} U = v \\ V = u - v \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} U = \dfrac{\omega^2}{\omega^3 - \omega^2} u + \dfrac{\omega^2 + 1}{\omega^3 - \omega^2} v, \\ V = \dfrac{\omega^2 + 1}{\omega^3 - \omega^2} u - \dfrac{1}{\omega^3 - \omega^2} v, \end{cases}$$

ω désignant $e^{\frac{2\pi i}{5}}$. La puissance cinq de la seconde transformation est d'ailleurs la transformation unité.

VIII. — Surfaces hyperabéliennes.

108. Les formules qui donnent les périodes G, H, G', déduites de g, h, g' par une transformation ordinaire du premier ordre, ne sont pas linéaires : M. Picard a observé qu'elles le deviennent si l'on fixe

la valeur de la quantité $h^2 - gg'$, et il a ainsi obtenu un groupe de substitutions à deux variables qu'il a nommé *groupe hyperabélien*. Les fonctions hyperabéliennes sont celles qui demeurent invariables par les substitutions du groupe, et comme trois d'entre elles sont liées par une relation algébrique, on arrive ainsi à la notion de surfaces hyperabéliennes : mais l'équation d'aucune surface de cette nature n'avait été *explicitement* obtenue. M. Bourget, dans sa Thèse de Doctorat, a étudié de plus près le groupe de M. Picard et montré qu'il se réduit à cinq substitutions fondamentales; il a étudié aussi les sous-groupes qui laissent invariables les modules des fonctions abéliennes initiales.

D'après cela, les modules des fonctions abéliennes qui vérifient une relation de la forme *singulière*, $h^2 - gg' = d$, sont liés par une équation donnant une surface hyperabélienne qui correspond à un sous-groupe du groupe complet de M. Picard. Dans le cas de $d = 2$, c'est-à-dire d'une relation singulière d'invariant huit, j'obtiens ainsi la *surface hyperabelienne* du quatrième ordre (69) :

$$\frac{xy + z}{xy - z} = \frac{y + xz}{y - xz}.$$

Les coordonnées x, y, z s'expriment, à l'aide des fonctions thêta normales du premier ordre d'arguments nuls, par les formules

$$x = \frac{\vartheta_{23}}{\vartheta_4}\frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_5}, \qquad y = \frac{\vartheta_{23}}{\vartheta_4}\frac{\vartheta_2}{\vartheta_{34}}, \qquad z = \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_5}\frac{\vartheta_2}{\vartheta_{34}}.$$

J'en déduis que l'on peut exprimer en fonction uniforme (hyperabélienne) de deux paramètres les sept quantités

$$u, \quad v, \quad \sqrt{1 - u^2}, \quad \sqrt{1 - v^2}, \quad \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \sqrt{\frac{1 + u^2}{1 + v^2}}, \quad \sqrt{\frac{u^2 - v^2}{1 + v^2}},$$

où u et v sont arbitraires.

IX. — Surfaces remarquables du quatrième ordre.

109. Les fonctions intermédiaires singulières m'ont conduit (68) à d'intéressantes surfaces d'ordre quatre.

Soit, par exemple, la relation singulière $g - Dg' = 0$; considérons

les fonctions intermédiaires normales, de caractéristique (o, o, o, o) et d'indices $2l$ et $2k$, tels que

$$l^2 - \mathrm{D}k^2 = 3.$$

Huit de ces fonctions, linéairement distinctes, sont *paires;* quatre d'entre elles ont leurs développements de Maclaurin autour du point $u = 0$, $v = 0$, commençant par des termes du quatrième ordre.

La surface pour laquelle les coordonnées homogènes d'un point sont proportionnelles à ces quatre fonctions est d'*ordre quatre*, et possède *quinze points doubles* qui correspondent aux quinze demi-périodes autres que $u = 0$, $v = 0$.

On obtient ainsi des surfaces du quatrième degré à quinze points doubles, hyperelliptiques, dépendant de deux modules arbitraires et d'un entier D ; ce ne sont pas les surfaces les plus générales à quinze points doubles, car celles-ci dépendent de quatre modules ; les nôtres doivent dès lors satisfaire à *une* condition géométrique indépendante de D. J'ai pu trouver cette condition qui s'énonce ainsi :

Projetons la surface sur un plan à partir d'un des quinze points doubles, le contour apparent se compose, comme d'ordinaire, d'une conique et de quatre droites; pour les surfaces ci-dessus définies, il existe une courbe de second ordre circonscrite au triangle formé par trois des droites, tangente à la conique et passant par les points communs à cette conique et à la quatrième droite.

J'obtiens des surfaces analogues en partant de la relation singulière $g + h - \mathrm{D}g' = 0$, à l'aide des fonctions intermédiaires, de caractéristique (o, o, o, o), et dont les indices, $2l'$ et $2k'$, vérifient

$$l'^2 + k'l' - \mathrm{D}k'^2 = 3.$$

110. Revenant enfin au premier cas, j'observe qu'il y a quatre fonctions *impaires*, de caractéristique (o, o, o, o), d'indices $2l$ et $2k$; la surface pour laquelle les coordonnées d'un point sont proportionnelles à ces quatre fonctions est encore d'*ordre quatre;* elle possède *deux groupes de seize droites* formant une configuration remarquable : chaque droite d'un groupe rencontre en effet dix droites de l'autre groupe.

X. — Fonctions à quatre paires de périodes.

111. Je traite, dans la Note 71, le problème suivant :

Existe-t-il des fonctions uniformes, $F(u, v)$, *ayant pour paires de périodes* $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h', g'), h' *étant différent de* h ; *en second lieu, si* $h' = h$, *est-il nécessaire que* $h_1^2 - g_1 g_1'$ *soit négatif,* g_1, h_1, g_1' *désignant les parties imaginaires de* g, h, g' ?

112. Si $h' \gtrless h$, il résulte d'un théorème célèbre de MM. Poincaré et Picard que l'on pourra, par une transformation convenable, ramener le Tableau des périodes à $(1, 0)$, $(0, 1)$, (G, H), (H', G'), où cette fois $H' = H$, et, par suite, exprimer $F(u, v)$ par un quotient de fonctions thêta. Mais la transformation employée n'est généralement pas du premier ordre, c'est-à-dire que les périodes du second Tableau n'entraînent pas celles du premier; l'existence et la forme précise des fonctions $F(u, v)$, admettant les périodes du premier Tableau, ne découlent donc pas immédiatement du théorème qui vient d'être rappelé.

M. Appell a montré que g, h, h', g' sont liés par une relation de la forme

$$(1) \qquad Ag + Bh + B'h' + Cg' + D(hh' - gg') + E = 0,$$

où les A, B, ..., E sont des entiers sans diviseur commun. Je montre que toute transformation, conduisant des périodes g, h, h', g' à des périodes *équivalentes*, ne change pas la valeur absolue de la quantité $AC + DE - BB'$; si Δ est cette valeur absolue, on peut ramener les périodes à des périodes équivalentes G, H, H' G', liées par la relation $H' = \Delta H$.

On en conclut, à l'aide de la transformation $U = \Delta u'$, $V = v'$, que toute fonction uniforme de U, V aux périodes $(1, 0)$, $(0, 1)$, (G, H), $(\Delta H, G')$, est exprimable par un quotient de fonctions uniformes $\Theta(u', v')$, qui sont des fonctions thêta, d'ordre $k\Delta$, aux périodes $(1, 0)$, $(0, 1)$, $\left(\frac{1}{\Delta}G, H\right)$, (H, G'), *mais non des fonctions thêta quelconques,*

car elles doivent vérifier la relation

$$\Theta\left(u' + \frac{1}{\Delta}, v'\right) = \Theta(u', v').$$

Ces fonctions thêta s'obtiennent aisément; et l'on a ainsi la solution complète du premier problème posé. On reconnaît que les fonctions $F(u, v)$, aux périodes $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h', g') liées par la relation (1), n'existent que si la quantité

$$(AC + DE - BB')(h_1 h'_1 - g_1 g'_1),$$

où g_1, ..., désignent les parties imaginaires de g, ..., est négative.

113. Pour qu'il existe des fonctions $\Phi(u, v)$ admettant les périodes $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h, g'), lorsque $h_1^2 - g_1 g'_1$ est positif, je trouve qu'il est nécessaire et suffisant que g, h, g' vérifient une relation *singulière* d'invariant positif

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0.$$

Si la forme $x^2 + Bxy + (AC + DE)y^2$ peut représenter le nombre -1, propriété qui ne dépend que de l'invariant, le système initial de périodes sera *équivalent* à un système analogue, pour lequel $h_1^2 - g_1 g'_1$ sera négatif; les fonctions abéliennes correspondantes sont alors des fonctions singulières d'invariant convenable, sans particularités spéciales.

Si la forme ci-dessus ne peut représenter -1, les fonctions abéliennes correspondantes s'expriment par des quotients de fonctions thêta, mais de fonctions thêta non générales, comme au n° 112. Les surfaces hyperelliptiques dérivées de ces fonctions abéliennes ne correspondent, *point par couple*, à aucune courbe de genre deux : à un couple sur la courbe répond bien un point de la surface, mais à un point de la surface répond toujours plus d'un couple sur la courbe. Ces remarques s'appliquent aux fonctions du numéro précédent.

CINQUIÈME SECTION.

TRAVAUX DIVERS.

114. La plupart des travaux de cette section portent sur les équatiens différentielles linéaires dont les coefficients dépendent rationnellement de la variable et qui admettent comme intégrales un ou plusieurs polynomes entiers. Les résultats les plus saillants sont ceux du Mémoire 80, où l'on fait connaître, pour un polynome satisfaisant à une équation différentielle du second ordre, des propriétés assez simples, liées à la réduction en fractions continues algébriques d'une certaine classe de fonctions; ces propriétés ont été retrouvées plus tard et publiées dans les *Mathematische Annalen* par un géomètre allemand, M. Heun, qui a reconnu ensuite mes droits de priorité.

115. Le Mémoire 81, dont j'ai dit quelques mots dans l'Avant-Propos, est celui où sont établis des résultats que M. Weierstrass, paraît-il, communiquait dans son Cours oral, mais que j'ignorais complètement. Il s'agit de reconnaître si une intégrale abélienne donnée, appartenant à une courbe donnée, est algébrique, problème ancien pour la solution duquel diverses méthodes ont été proposées : ces méthodes, toutefois, ont l'inconvénient de ne pas fournir sous une forme *explicite* les conditions nécessaires et suffisantes cherchées; le théorème général suivant, conclusion de mon étude, paraît remplir le but assez simplement :

Soient

$f(x, y) = 0$ *l'équation d'une courbe algébrique de genre* p;

$\varphi(x, y)$ *une fonction rationnelle de* x, y;

$G_1, G_2, \ldots, G_p$, p *intégrales abéliennes de première espèce distinctes;*

$H_1, H_2, \ldots, H_p$, p *intégrales de deuxième espèce distinctes, appartenant à la courbe.*

Pour que l'intégrale $\int \varphi(x, y)\,dx$ *se réduise à une fonction rationnelle de* x, y, *il faut et il suffit :*

1° *Que cette intégrale n'ait pas de période polaire ;*

2° *Que la somme des périodes polaires de chacune des intégrales* $\int \varphi(x, y)\,G_i(x)\,dx$ *soit nulle ;*

3° *Que la somme des périodes polaires de chacune des intégrales* $\int \varphi(x, y)\,H_i(x)\,dx$ *soit également nulle.*

Il est intéressant d'observer que si l'on suppose l'intégrale $\int \varphi(x, y)dx$ décomposée en intégrales de première, seconde et troisième espèces :

Les conditions 1° expriment que les intégrales de troisième espèce disparaissent;

Les conditions 2°, que les intégrales de seconde espèce se réduisent à une fonction rationnelle ;

Les conditions 3°, que les intégrales de première espèce disparaissent à leur tour.

29018 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.